Exercice I :

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in I$. Évaluons $x_{n+1}(t) - x_n(t)$.

$$\begin{aligned} x_{n+1}(t) - x_n(t) &= x_0 + \int_{t_0}^t a(u)(x_n(u)) + b(u)du - x_0 - \int_{t_0}^t a(u)(x_{n-1}(u)) + b(u)du \\ &= \int_{t_0}^t a(u)(x_n(u)) - a(u)(x_{n-1}(u))du \\ &= \int_{t_0}^t a(u)(x_n(u) - x_{n-1}(u))du \quad \text{car } a(u) \text{ linéaire} \end{aligned}$$

2) a) La fonction f est continue (elle est linéaire et E est de dimension finie). Comme la sphère unité $\{x \in E \ , \ ||x|| = 1\}$ est compacte, $N(f)$ est bien définie.

b) Vérifions les axiomes des normes ; notons $S = \{x \in E \ , \ ||x|| = 1\}$.

— Pour tout $x \in S$, $||f(x)||_E \geqslant 0$ donc $\boxed{N(f) \geqslant 0}$

— Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $N(f) = 0$. Pour x dans S, $||f(x)||_E \leqslant 0$ donc $f(x) = 0$. Maintenant pour x non nul on a

$$f(x) = ||x||_E f\left(\frac{x}{||x||_E}\right) = 0$$

Pour finir, $f(0) = 0$ donc $\boxed{f = 0_{\mathscr{L}(E)}}$

— Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, montrons que $N(\lambda f) = |\lambda| N(f)$.
Si $\lambda = 0$ c'est évident
Si $\lambda \neq 0$, on a pour tout $x \in S$,

$$||\lambda f(x)||_E = |\lambda| ||f(x)||_E \leqslant |\lambda| N(f)$$

On en déduit que $N(\lambda f) \leqslant |\lambda| N(f)$.
De plus, on sait que $f = \frac{1}{\lambda}(\lambda f)$ donc $N(f) \leqslant \left|\frac{1}{\lambda}\right| N(\lambda f)$ ce qui implique que $|\lambda| N(f) \leqslant N(\lambda f)$.
Par double inégalité, $\boxed{N(\lambda f) = |\lambda| N(f)}$

— Soit f, g dans $\mathscr{L}(E)$. Pour tout x dans S,

$$||(f+g)(x)||_E \leqslant ||f(x)||_E + ||g(x)||_E \leqslant N(f) + N(g)$$

On en déduit que $\boxed{N(f+g) \leqslant N(f) + N(g)}$

3) La fonction a est supposée continue de I dans $\mathscr{L}(E)$ (en particulier en utilisant la norme N sur l'ensemble d'arrivé car$\mathscr{L}(E)$ est de dimension finie et donc toutes les normes sont équivalentes). Comme I est un compact (c'est un segment), il existe M tel que pour tout $t \in I$, $N(a(t)) \leqslant M$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in I$, si $x_n(t) - x_{n-1}(t) \neq 0_E$ alors

$$||a(t)(x_n(t) - x_{n-1}(t))||_E = ||x_n(t) - x_{n-1}(t)||_E \cdot \left|\left| a(t)\left(\frac{x_n(t) - x_{n-1}(t)}{||x_n(t) - x_{n-1}(t)||_E}\right)\right|\right| \leqslant M ||x_n(t) - x_{n-1}(t)||_E.$$

Le résultat reste vrai si $x_n(t) = x_{n-1}(t)$.

4) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que pour tout entier naturel n et tout $t \in I$,

$$||x_{n+1}(t) - x_n(t)||_E \leqslant \frac{M^n |t - t_0|^n}{n!} ||x_1 - x_0||_\infty$$

— $\boxed{\text{I}}$: Pour $n = 0$, le résultat est évident par définition de la norme infinie.

— $\boxed{\text{H}}$: Soit $n \geqslant 0$. On suppose que pour tout $t \in I$,

$$||x_{n+1}(t) - x_n(t)||_E \leqslant \frac{M^n|t-t_0|^n}{n!}||x_1 - x_0||_\infty$$

Alors, pour $t \geqslant t_0$,

$$\begin{aligned} ||x_{n+2}(t) - x_{n+1}(t)||_E &= \left|\left|\int_{t_0}^t a(u)(x_{n+1}(u) - x_n(u))du\right|\right| \\ &\leqslant \int_{t_0}^t ||a(u)(x_{n+1}(u) - x_n(u))||_E\, du \\ &\leqslant \int_{t_0}^t M||x_{n+1}(u) - x_n(u)||_E du \\ &\leqslant \int_{t_0}^t \frac{M^{n+1}(u-t_0)^n}{n!}||x_1 - x_0||_\infty du \\ &\leqslant \frac{M^{n+1}(t-t_0)^{n+1}}{(n+1)!}||x_1 - x_0||_\infty \end{aligned}$$

Le calcul est similaire pour $t \leqslant t_0$.

— $\boxed{\text{C}}$: Pour tout entier naturel n et tout élément t de I,

$$||x_{n+1}(t) - x_n(t)||_E \leqslant \frac{M^n|t-t_0|^n}{n!}||x_1 - x_0||_\infty$$

Finalement comme $|t - t_0| \leqslant \ell$ où ℓ est la longueur de l'intervalle, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in I, ||x_{n+1}(t) - x_n(t)||_E \leqslant \frac{M^n \ell^n}{n!}||x_1 - x_0||_\infty$$

5) Le résultat précédent permet d'écrire que

$$\forall n \in \mathbb{N}, ||x_{n+1} - x_n||_\infty \leqslant \frac{M^n \ell^n}{n!}||x_1 - x_0||_\infty.$$

Cela permet de montrer que la série $\left(\sum_{n\geqslant 0} ||x_{n+1} - x_n||_\infty\right)$ converge, ce qui signifie que la série de fonctions $\left(\sum_{n\geqslant 0}(x_{n+1} - x_n)\right)$ converge normalement donc uniformément sur I. Notons S la somme de cette série de fonctions. Pour tout $N \geqslant 1$, par télescopage

$$x_N = x_0 + \sum_{n=0}^{N-1} x_{n+1} - x_n$$

Cela montre que la suite de fonctions (x_n) converge uniformément vers $S + x_0$.

6) Notons $x = S + x_0$ la limite de (x_n), il reste à montrer que x est bien la solution cherchée.

Notons pour tout entier naturel n, $y_n : u \mapsto a(u)(x_n(u)) + b(u)$. On peut voir que la suite de fonctions (y_n) converge uniformément vers $y : u \mapsto a(u)(x(u)) + b(u)$ car pour tout $u \in I$ et tout entier naturel n,

$$||y_n(u) - y(u)||_E = ||a(u)(x_n(u) - x(u))||_E \leqslant M||x_n(u) - x(u)||_E \leqslant M||x_n - x||_\infty$$

Ce qui implique que

$$||y_n - y||_\infty \leqslant M||x_n - x||_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Pour $t \in I$, sur le segment $[t_0, t]$ on a alors

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{t_0}^t y_n(u)du = \int_{t_0}^t \lim_{n\to+\infty} y_n(u)du = \int_{t_0}^t y(u)du$$

En ajoutant x_0 de chaque coté et en utilisant la définition de x_{n+1} on a donc

$$\lim_{n\to+\infty} x_{n+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} a(u)(x(u)) + b(u)du$$

C'est-à-dire

$$\forall t \in I, x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} a(u)(x(u)) + b(u)du.$$

La fonction x est bien solution du problème de Cauchy.

7) On suppose avoir deux fonctions x_1 et x_2 vérifiant notre problème de Cauchy (sous sa forme intégrale). On a alors

$$\forall t \in I, x_1(t) - x_2(t) = \int_{t_0}^{t} a(u)(x_1(u) - x_2(u))du.$$

On peut répeter l'argument précédent pour montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, ||x_1 - x_2||_\infty \leqslant \frac{M^n \ell^n}{n!} ||x_1 - x_2||_\infty$$

En faisant tendre n vers ∞, on obtient bien que $||x_1 - x_2||_\infty = 0$ et donc $x_1 = x_2$.

8) Si I n'est plus un segment. On sait que pour tout segment $K \subset I$, il existe une unique solution x_K du problème de Cauchy sur K. Maintenant pour tout $t \in I$ et K, K' deux segments dans I. On peut considérer le plus petit segment dans I contenant K et K'. Par unicité de la solution sur ce segment on a $x_K(t) = x_{K'}(t)$. De ce fait, on peut construire une fonction $x : t \mapsto x_K(t)$ où K est **un** segment qui contient t.

Exercice II :

1) a) Soient $k \in [\![1, n]\!]$, $\lambda \in \mathbb{K}$ et $Y_1, \ldots, Y_n, Z_k \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Par multilinéarité de $\det_{can}$ et par linéarité de la multiplication par B,

$$\begin{aligned}
\varphi_B(Y_1, \cdots, Y_k + \lambda Z_k, \ldots, Y_n) &= \sum_{i=1,\, i\neq k}^{n} \det{}_{can}(Y_1, \cdots, Y_{i-1}, B\,Y_i, \cdots, Y_k + \lambda Z_k, \cdots, Y_n) \\
&+ \det{}_{can}(Y_1, \ldots, BY_k + \lambda BZ_k, \ldots, Y_n) \\
&= \sum_{i=1,\, i\neq k}^{n} \det{}_{can}(Y_1, \cdots, Y_{i-1}, B\,Y_i, \cdots, Y_k, \cdots, Y_n) \\
&+ \sum_{i=1,\, i\neq k}^{n} \lambda \det{}_{can}(Y_1, \cdots, Y_{i-1}, B\,Y_i, \cdots, Z_k, \cdots, Y_n) \\
&+ \det{}_{can}(Y_1, \ldots, BY_k, \ldots, Y_n) \\
&+ \lambda \det{}_{can}(Y_1, \ldots, BZ_k, \ldots, Y_n) \\
&= \varphi_B(Y_1, \cdots, Y_k, \ldots, Y_n) + \lambda \varphi_B(Y_1, \cdots, Z_k, \ldots, Y_n)
\end{aligned}$$

Donc φ_B est une forme (à valeurs dans $\mathbb{K}$) $\boxed{\text{multilinéaire}}$.

Soient $k, \ell \in \mathbb{N}$ tels que $1 \leqslant k < \ell \leqslant n$ et et $Y_1, \ldots, Y_n \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tels que $Y_k = Y_\ell$.

$$\begin{array}{rcl}
\varphi_B(Y_1, \cdots, \ldots, Y_n) & = & \displaystyle\sum_{i=1,\, i\neq k,\ell}^{n} \det{}_{can}(Y_1, \cdots, Y_k, \cdots, B\,Y_i, \cdots, Y_\ell, \cdots, Y_n) \\
 & + & \det{}_{can}(Y_1, \cdots, BY_k, \cdots, Y_\ell, \cdots, Y_n) \\
 & + & \det{}_{can}(Y_1, \cdots, Y_k, \cdots, BY_\ell, \cdots, Y_n) \\
 & = & \displaystyle\sum_{i=1,\, i\neq k,\ell}^{n} 0 \\
 & + & \det{}_{can}(Y_1, \cdots, BY_k, \cdots, Y_\ell, \cdots, Y_n) \\
 & - & \det{}_{can}(Y_1, \cdots, BY_\ell, \cdots, Y_k, \cdots, Y_n) \\
 & & \text{car } \det{}_{can} \text{ est alternée et antisymétrique} \\
 & = & 0
\end{array}$$

Donc φ_B est $\boxed{\text{alternée}}$.

b) L'ensemble des formes n-linéaires alternées sur $\mathscr{M}_{n,1}$ est une droite vectorielle car $\mathscr{M}_{n,1}$ est de dimension n. Comme $\det_{can}$ est n-linéaire alternée et non nulle (car $\det_{can}(can) = 1 \neq 0$), il existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $\varphi_B = \alpha \det_{can}$.

Evaluant l'égalité ci-dessus en can,

$$\varphi_B(can) = \alpha \det{}_{can}(can) = \alpha.1 = \alpha$$

Notant $can = (E_1, \ldots, E_n)$ et $B = (C_1 \,|\, C_2 \,|\, \cdots \,|\, C_n) = (b_{ij})$,

$$\begin{array}{rcl}
\alpha & = & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \det{}_{can}(E_1, \ldots, C_j, \ldots, E_n) \\
 & = & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \begin{vmatrix} 1 & & b_{1j} & & \\ & \ddots & \vdots & & \\ & & b_{jj} & & \\ & & \vdots & \ddots & \\ & & b_{nj} & & 1 \end{vmatrix} \\
 & = & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} b_{jj} \qquad \text{en développant le j-ème déterminant selon sa j-ème ligne} \\
 & = & \boxed{\mathsf{tr}(B)}
\end{array}$$

2) Par multilinéarité de $\det_{can}$, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{array}{rcl}
W'(t) & = & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \det{}_{can}(X_1(t), \ldots, X_j'(t), \ldots, X_n(t)) \\
 & = & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \det{}_{can}(X_1(t), \ldots, A(t)X_j(t), \ldots, X_n(t)) \\
 & = & \varphi_{A(t)}(X_1(t), \ldots, X_n(t)) \\
W'(t) & = & \boxed{\mathsf{tr}(A(t))W(t)}
\end{array}$$

par la question précédente.

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire homogène scalaire d'ordre 1 à coefficient $t \mapsto \mathsf{tr}(A(t)$ continu, donc

$$\forall (s,t) \in \mathbb{R}, \quad W(t) = W(s) \exp\left(\int_s^t \mathsf{tr}(A(u))du\right)$$

3) Cette équation se vectorialise en $Y'(t) = A(t)Y(t)$ où $A(t)$ est la matrice compagne :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ a_0(t) & \dots & \dots & a_{n-1}(t) \end{pmatrix}$$

dont la trace est $a_{n-1}(t)$.

Ainsi le wronskien précédent vérifie :

$$\forall (s,t) \in \mathbb{R}, \quad \boxed{W(t) = W(s) \exp\left(\int_s^t a_{n-1}(u) du \right)}$$