Exercice I :

Le but de cet exercice est de prouver le théorème de Cauchy linéaire

Dans toute la suite E sera un espace vectoriel de dimension finie notée p, I un **segment** non trivial de $\mathbb{R}$, a une fonction continue de I dans $\mathscr{L}(E)$ et b une fonction continue de I dans E. On note ℓ la longueur de I, $||.||_E$ une norme de E et $||.||_\infty$ la norme infinie des fonctions continues de I dans E relativement à $||.||_E$, c'est-à-dire que pour tout $x \in \mathscr{C}^0(I, E)$,

$$||x||_\infty = \sup_{t \in I} ||x(t)||_E$$

Pour $t_0 \in I$ et $x_0 \in E$, on considère le problème de Cauchy linéaire (à valeurs vectorielles)

$$(PC) \begin{cases} x'(t) = a(t)(x(t)) + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

On rappelle qu'une fonction x de I vers E est de classe $\mathscr{C}^1$ et vérifie (PC) si et seulement si elle est continue et vérifie l'équation intégrale

$$\forall t \in I, \quad x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} \big(a(u)(x(u)) + b(u)\big) du.$$

On veut montrer que (PC) admet une unique solution. On procède par approximations. On considère la fonction x_0 définie sur I par $x_0 : t \mapsto x_0$ et, pour tout entier n, on pose

$$x_{n+1} : t \mapsto x_0 + \int_{t_0}^{t} \big(a(u)(x_n(u)) + b(u)\big) du.$$

Le but est alors de démontrer que la suite de fonctions (x_n) converge une fonction x qui sera la solution cherchée. On va montrer que cette convergence est uniforme afin de pouvoir appliquer les théorèmes usuels d'intégration.

1) Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in I$,

$$x_{n+1}(t) - x_n(t) = \int_{t_0}^{t} a(u)(x_n(u) - x_{n-1}(u)) du.$$

2) Pour toute application f dans $\mathscr{L}(E)$, on pose

$$N(f) = \sup_{x \in E, ||x||=1} ||f(x)||_E.$$

   a) Justifier que $N(f)$ est bien définie

   b) Montrer que $f \mapsto N(f)$ est une norme sur $\mathscr{L}(E)$.

3) Justifier qu'il existe $M \in \mathbb{R}$, tel que $\forall t \in I, N(a(t)) \leqslant M$.
   En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$||a(t)(x_n(t) - x_{n-1}(t))||_E \leqslant M ||x_n(t) - x_{n-1}(t)||_E.$$

4) En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in I, ||x_{n+1}(t) - x_n(t)||_E \leqslant \frac{M^n \ell^n}{n!} ||x_1 - x_0||_\infty.$$

5) Montrer que la suite de fonction (x_n) converge uniformément vers une fonction x.
   On pourra faire apparaitre une série de fonctions.

6) Vérifier que la fonction x est solution du problème de Cauchy (on pourra utiliser le rappel sur l'équivalence du problème de Cauchy et de l'équation intégrale).

7) Montrer l'unicité de la solution du problème de Cauchy.

On pourra considérer deux solutions et, en procédant comme ci-dessus, montrer que la norme infinie de la différence est nulle.

8) Comment étendre le résultat au cas où I est un intervalle mais n'est pas un segment ?

Exercice II :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1) Soit $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On considère $\varphi_B : (\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}))^n \to \mathbb{K}$ définie par

$$\varphi_B : (Y_1, \cdots, Y_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} \det_{can}(Y_1, \cdots, Y_{i-1}, B\,Y_i, Y_{i+1}, \cdots, Y_n)$$

où *can* désigne la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$).

a) Montrer que φ_B est une formule multilinéaire alternée.

b) En déduire qu'il existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $\varphi_B = \alpha \det_{can}$. Exprimer α à l'aide des coefficients de B.

2) Soit $A : \mathbb{R} \to \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est une fonction continue. On considère le système différentiel :

$$X'(t) = A(t)\,X(t) \tag{E}$$

Soit $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ un système fondamental de solutions de (E), on note

$$W : t \longmapsto W(X_1, \cdots, X_n)(t)$$

son déterminant Wronskien dans la base canonique.

Montrer que : $\forall (s,t) \in \mathbb{R}$, $W(t) = W(s) \exp\left(\int_s^t \mathrm{tr}(A(u))du\right)$.

3) Appliquer le résultat précédent au wronskien d'un système fondamental de solutions d'une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre n :

$$y^{(n)}(t) = a_0(t)y(t) + \ldots + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t)$$

où $a_0, \ldots, a_{n-1}$ sont des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs scalaires.