I - Calcul de la distance d'une matrice à $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et à $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$

1) Pour $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on note $C = (c_{i,j})$ la matrice AB. De ce fait, pour tout i, j on a $c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{k,i}b_{k,j}$. En particulier, $c_{i,i} = \sum_{k=1}^{n} a_{k,i}b_{k,i}$. On en déduit que $(A \,|\, B) = \sum_{1\leqslant i,k\leqslant n} a_{k,i}b_{k,i}$.

   Ainsi $(A|A) = \sum_{1\leqslant k,i\leqslant n} a_{k,i}^2$. et donc $||A|| = \sqrt{\sum_{1\leqslant k,i\leqslant n} a_{k,i}^2}$.

2) Les deux espaces $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires. En effet, soit $M \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R}) \cap \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$, $M^\top = M = -M$ donc $M = 0$. Ils sont également orthogonaux car, pour $A \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$,

$$(A \,|\, S) = \mathrm{tr}(A^\top S) = -\mathrm{tr}(AS) = -\mathrm{tr}(SA) = -\mathrm{tr}(S^\top A) = -(S \,|\, A),$$

   et donc $(A \,|\, S) = 0$.

   Maintenant, si $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on a $M = \dfrac{M + M^\top}{2} + \dfrac{M - M^\top}{2}$ avec $\dfrac{M + M^\top}{2} \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ ainsi que $\dfrac{M - M^\top}{2} \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$. Finalement, $\boxed{\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathscr{A}_n(\mathbb{R}).}$

3) Si A est une matrice quelconque, la distance de A à $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ est égale à la distance de A au projeté orthogonal de A sur $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. D'après la décomposition ci-dessus, le projeté orthogonal d'une matrice A sur $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ est $\dfrac{A + A^\top}{2}$. On en déduit que $\boxed{d(A, \mathscr{S}_n(\mathbb{R})) = \left|\left|A - \tfrac{1}{2}(A + A^\top)\right|\right| \left|\left|\tfrac{1}{2}(A - A^\top)\right|\right|}$

   De la même manière on obtient $d(A, \mathscr{A}_n(\mathbb{R})) = \left|\left|\tfrac{1}{2}(A + A^\top)\right|\right|$.

4) On a facilement $\dfrac{\Gamma + \Gamma^\top}{2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ puis $d(\Gamma, \mathscr{A}_3(\mathbb{R})) = 2\sqrt{2}$.

5) Il est clair que $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ n'est pas un espace vectoriel car $0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})} \notin \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$.

   De même, pour $p \neq 0$, Δ_p n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ car il ne contient pas la matrice nulle.

   Pour finir, si $p \notin \{0, n\}$, ∇_p n'est pas non plus un sous-espace vectoriel. En effet, comme $p > 0$, il contient toutes les matrices de rang 1. Il contient en particulier toutes les matrice E_{ii} qui ont un coefficient 1 à la i-ème ligne et i-ème colonne et des zéros autre part. Par contre $I_n = E_{11} + \cdots + E_{nn} \notin \nabla_p$ si $s < n$.

II - Calcul de la distance d'une matrice à Δ_p

6) a) Soit α le minimum de l'ensemble des $|\lambda|$ pour λ valeur propre (réelle) non nulle de M (si M n'a aucune valeur propre réelle non nulle, on choisit $\alpha > 0$ quelconque). Pour tout $\lambda \in]0, \alpha[$, $M - \lambda I_n$ est inversible car λ n'est pas valeur propre de M.

   b) Pour M quelconque et α comme au a, la suite $\left(M - \dfrac{\alpha}{k+2} I_n\right)_{k\geqslant 0}$ est une suite de matrices inversibles qui converge vers M : $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est donc dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

7) On remarque que, par définition, $\Delta_n = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. D'après la question 6, pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\boxed{d(A, \Delta_n) = d(A, \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})) = 0}$.

   Comme $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est contenu dans tous les Δ_p pour $p \leqslant n$, on a à plus forte raison $d(A, \Delta_p) = 0$ pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et pour tout $p \leqslant n$.

III - Calcul de la distance d'une matrice à $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$

A - Théorème de la décomposition polaire

8) a) On obtient directement :

$$H = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix} = I_3 + 5\,J \text{ avec } J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) La matrice J est clairement de rang 1, donc 0 est valeur propre double de J, la troisième valeur propre étant égale à 3 puisque $\mathrm{tr}(J) = 3$. Comme le vecteur avec que des 1 est un vecteur propre évident associé à la valeur propre 3, posons

$$e_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Le noyau de J est alors l'orthogonal de e_1 : $\mathrm{Ker} J = \mathrm{Vect}(e_1)^{\perp} = \mathrm{Vect} u_1, u_2$ où

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

On détermine (par le procédé de Gram-Schmidt) α pour que u_1 et $u_2 + \alpha u_1$ soient orthogonaux. On obtient

$$\alpha = -\frac{(u_1|u_2)}{(u_1|u_1)} = -\frac{1}{2}.$$

Il ne reste plus qu'à normer les vecteurs. On pose donc

$$e_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } e_3 = \frac{\sqrt{6}}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Notons que l'on pouvait aussi obtenir e_3 par un produit vectoriel.

Finalement, la matrice $P = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & -\frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix}$ est la matrice de changement de base de la base canonique à la base orthonormée (e_1, e_2, e_3). De ce fait $P \in \mathscr{O}_3(\mathbb{R})$ et $P^{-1}JP$ est diagonale :

$$P^{-1}JP = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

c) On a vu que $H = I_3 + 5J$ et donc

$$P^{-1}HP = P^{-1}I_3P + 5P^{-1}JP = \begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On peut donc prendre $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

d) Comme S est inversible (les valeurs propres de S sont égales à celles de D), on peut poser $U = \Gamma S^{-1}$. Nous avons ensuite

$$U^{\top}U = (S^{-1})^{\top}\Gamma^{\top}\Gamma S^{-1} = S^{-1}HS^{-1} = PD^{-1}P^{-1}PD^2P^{-1}PDP^{-1} = I_3$$

9) Soit $S \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. On veut montrer que $\mathrm{Sp}(S) \subset \mathbb{R}_+ \iff S \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$.

- $\boxed{\Rightarrow}$ Comme $S \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$, d'après le théorème spectral, elle est diagonalisable en base orthonormée. Il existe $P \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$P^\top SP = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Pour tout $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X^\top SX = X^\top PDP^\top X = {}^tYDY = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2$ où on a posé $Y = X^\top P = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. En particulier, $X^\top SX \geqslant 0$. On a bien $S \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$.

- $\boxed{\Leftarrow}$ On suppose que $S \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(S)$ et X un vecteur propre (donc non nul) associé à λ. On a

$$X^\top SX = X^\top(\lambda X) = \lambda(X^\top X) \geqslant 0$$

Comme $(X^\top X) > 0$ car $X \neq 0$, $\lambda \geqslant 0$. On en déduit que $\mathrm{Sp}(S) \subset \mathbb{R}_+$

10) Soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

a) On commence par montrer que $A^\top A$ est symétrique : $(A^\top A)^\top = A^\top(A^\top)^\top = A^\top A$.
De plus, soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X^\top A^\top AX = (AX)^\top AX \geqslant 0$.
$\boxed{\text{Finalement, la matrice } A^\top A \text{ appartient à } \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})}$.

b) Comme $A^\top A$ est une matrice symétrique réelle, d'après le théorème spectral, il existe une matrice orthogonale P telle que $P^{-1}A^\top AP$ soit une matrice diagonale. Notons $P^{-1}A^\top AP = \Delta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$.

On a vu à la question 8.a) que $A^\top A$ était dans $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ et donc, d'après la question 7, les valeurs propres $\lambda_1, \ldots \lambda_n$ sont positives. On peut donc considérer, la matrice

$$D = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

De ce fait, $D^2 = P^{-1}A^\top AP$.

c) Vérifions que $S = PDP^{-1}$ est symétrique,

$$S^\top = (PDP^{-1})^\top = (P^{-1})^\top DP^\top = PDP^{-1},$$

en effet, P est orthogonale et D symétrique car diagonale.
De plus, les valeurs propres de S sont les mêmes que celles de D : $\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n}$ avec les notations de la question précédente donc elles sont positives. De ce fait, $\boxed{S \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})}$.

d) On calcule,

$$V^\top V = (SA^{-1})^\top SA^{-1} = (A^{-1})^\top S^2A^{-1} = (A^{-1})^\top PD^2P^{-1}A^{-1} = (A^{-1})^\top PP^{-1}A^\top APP^{-1}A^{-1} = I_n$$

On en déduit que V est orthogonale. De ce fait, V est inversible et $V = SA^{-1}$ implique que $VA = S$ puis que $A = V^{-1}S$. On pose donc $U = V^{-1}$ qui est orthogonale comme inverse d'une matrice orthogonale.

e) On ne suppose plus A inversible.

i) L'espace $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel de dimension finie. Pour montrer que $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ est compact, il suffit de montrer qu'il est borné et fermé.

- Soit $P \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$, $||P|| = (P|P) = \text{tr}(P^\top P) = \text{tr}(I_n) = n$. On en déduit que $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ est bien borné.
- On considère $\Phi : A \mapsto A^\top A$. C'est la composée de $A \mapsto ({}^tA, A)$ qui est continue car linéaire et de $(A, B) \mapsto AB$ qui est continue car bilinéaire. On remarque alors que $\mathscr{O}_n(\mathbb{R}) = \Phi^{-1}(\{I_n\})$ or le singleton $\{I_n\}$ est un fermé et donc $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ est un fermé comme image réciproque d'un fermé par une application continue.

Finalement $\boxed{\mathscr{O}_n(\mathbb{R}) \text{ est compact}}$.
Il existe ainsi une extractrice φ telle que la suite $(U_{\varphi(p)})_{p\geqslant 0}$ converge vers une matrice $U \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$.

ii) Pour tout $p \geqslant 0$, $A_{\varphi(p)} = U_{\varphi(p)} S_{\varphi(p)}$ et donc $S_{\varphi(p)} = U^{-1}_{\varphi(p)} A_{\varphi(p)} = U^\top_{\varphi(p)} A_{\varphi(p)}$.
Maintenant, la suite $(A_{\varphi(p)})$ tend vers A par construction et la suite $(U_{\varphi(p)})$ tend vers $U \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$. De ce fait, la suite $(U^\top_{\varphi(p)})$ tend vers $U^\top \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ car $M \mapsto M^\top$ est continue puisque linéaire (et on travaille sur un espace vectoriel de dimension finie). Finalement, par continuité de $(M, N) \mapsto MN$, $(S_\varphi(p))$ converge vers $S = U^\top A$.
Il reste à vérifier que $S \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ pour cela on montre que $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ est fermé. Soit (M_p) une suite de matrices de $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ qui converge vers une matrice M. On veut montrer que $M \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$.

- Pour tout $p \geqslant 0$, $M_p^\top = M_p$. En passant à la limite, (car $A \mapsto A^\top$ est continue), on obtient $M^\top = M$ et donc M est symétrique.
- Soit $X \in \mathscr{M}_{n1}(\mathbb{R})$, l'application $A \mapsto X^\top AX$ est continue car linéaire. On en déduit que $X^\top MX = \lim\limits_{p\to\infty} X^\top M_p X \geqslant 0$.

Finalement $(S_{\varphi(p)})_{p\geqslant 0}$ converge vers une matrice S appartenant à $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ et $A = US$.

B - Calcul de $d(A, \mathscr{O}_n(\mathbb{R}))$

11) Nous avons :

$$||\Omega M||^2 = \text{tr}(M^\top \Omega\Omega^\top M) = \text{tr}(M^\top M) = ||M||^2$$

et en utilisant la propriété classique $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$:

$$||M\Omega||^2 = \text{tr}(\Omega^\top M^\top M\Omega) = \text{tr}(M^\top M\Omega\Omega^\top) = \text{tr}(M^\top M) = ||M||^2,$$

ce qui donne bien $||\Omega M|| = ||M\Omega|| = ||M||$.

12) a) On a $||A - \Omega|| = ||US - \Omega|| = ||U(S - U^{-1}\Omega)|| = ||S - U^{-1}\Omega||$ d'après la question 11.
Maintenant, l'application $\Omega \mapsto U^{-1}\Omega$ est une bijection de $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ dans lui même (sa réciproque est $\Omega \mapsto U\Omega$). De ce fait, quand Ω décrit tout $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$, $U^{-1}\Omega$ décrit également tout $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$, donc $d(A, \mathscr{O}_n(\mathbb{R})) = d(S, \mathscr{O}_n(\mathbb{R}))$.

b) Pour tout $\Omega \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$, nous avons $||S - \Omega|| = ||PDP^{-1} - \Omega|| = ||P(D - P^{-1}\Omega P)P^{-1}|| = ||D - P^{-1}\Omega P||$ car $P, P^{-1} \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$. Une nouvelle fois, $P^{-1}\Omega P$ décrit tout $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ quand Ω décrit $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ donc

$$d(A, \mathscr{O}_n(\mathbb{R})) = d(S, \mathscr{O}_n(\mathbb{R})) = d(D, \mathscr{O}_n(\mathbb{R})).$$

13) a) Soit $\Omega \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$,

$$||D - \Omega||^2 = \text{tr}((D - \Omega)^\top(D - \Omega)) = \text{tr}(D^2 - \Omega^\top D - D^\top\Omega + I_n) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 - 2\text{tr}(D\Omega) + n.$$

En effet $\text{tr}(\Omega^\top D) = \text{tr}(D^\top\Omega) = \text{tr}(D\Omega)$.

b) En notant $d_{i,j}$ et $\omega_{i,j}$ les termes génériques de D et de Ω, nous obtenons :

$$\mathrm{tr} D\Omega = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} d_{i,k}\omega_{k,i} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \omega_{i,i} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

car Ω étant orthogonale, les $\omega_{i,j}$ sont éléments de $[-1,1]$

c) On en déduit que pour tout $\Omega \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$:

$$||D-\Omega||^2 \geqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} \lambda_i + n = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - 1)^2 = ||D - I_n||^2.$$

Comme $I_n \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$, ceci prouve que la distance de D à $\Omega \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ est minimale pour $\Omega = I_n$.

14) Nous venons de démontrer que $d(A, \mathscr{O}_n(\mathbb{R})) = d(D, \mathscr{O}_n(\mathbb{R})) = d(D, I_n) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - 1)^2}$, où les λ_i sont les racines carrées des valeurs propres de $A^\top A$.

Nous avons ici $n = 3$, $\lambda_1 = 4$ et $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$, donc $d(\Gamma, \mathscr{O}_n(\mathbb{R})) = 3$.

15) On a finalement en utilisant les résultats de 11, 12.b et 13.c :

$$d(A, \mathscr{O}_n(\mathbb{R})) = d(D, \mathscr{O}_n(\mathbb{R})) = ||D - I|| = ||P(D-I)P^{-1}|| = ||S - I|| = ||U(S-I)|| = ||A - U||.$$

IV - Calcul de la distance d'une matrice A à ∇_p

A - Théorème de Courant et Fischer

16) Avec les notations de l'énoncé, $X = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i C_i$. On en déduit que $AX = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i x_i C_i$ puis

$$X^\top AX = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_j x_i \; C_j^\top C_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2$$

car les colonnes de P étant orthonormées, $C_j^\top C_i = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Comme la base $(C_1, C_2, \ldots, C_n)$ est orthonormale pour le produit scalaire usuel, $X^\top X = ||X||^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2$.

En particulier, pour $X = C_k$, nous obtenons :

$$\frac{C_k^\top A C_k}{C_k^\top C_k} = \lambda_k.$$

17) Soit X élément non nul de F_k. Avec les notations de la question 16, nous avons $x_i = 0$ pour $i > k$, ce qui donne :

$$\frac{X^\top AX}{X^\top X} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i x_i^2}{\sum\limits_{i=1}^{k} x_i^2} \geqslant \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_k x_i^2}{\sum\limits_{i=1}^{k} x_i^2} = \lambda_k$$

car les λ_i décroissent. Comme le minorant λ_k est atteint pour $X = C_k$, on en déduit :

$$\min_{X \in F_k \setminus \{O\}} \frac{X^\top AX}{X^\top X} = \lambda_k.$$

18) a) On sait que $\dim F \cap G = \dim F + \dim G - \dim F \cup G$ pour F et G sous-espace vectoriel de E, donc

$$\dim\left(F \cap \mathrm{Vect}(C_k, C_{k+1}, \ldots, C_n)\right) = k + (n-k+1) - \dim\left(F \cup \mathrm{Vect}(C_k, C_{k+1}, \ldots, C_n)\right) \geqslant 1$$

car $\dim\left(F \cup \mathrm{Vect}(C_k, C_{k+1}, \ldots, C_n)\right) \leqslant n$.

b) En reprenant encore les notations de la question 16, nous avons :

$$\frac{X^\top A X}{X^\top X} = \frac{\displaystyle\sum_{i=k}^{n} \lambda_i x_i^2}{\displaystyle\sum_{i=k}^{n} x_i^2} \leqslant \frac{\displaystyle\sum_{i=k}^{n} \lambda_k x_i^2}{\displaystyle\sum_{i=1}^{k} x_i^2} = \lambda_k$$

car les λ_i décroissent.

19) Pour tout entier k, $F_k = \mathrm{Vect}(C_1, \ldots, C_k)$ est de dimension k (et donc appartient à $\mathscr{F}_k$) car les colonnes de la matrices P sont libres. On en déduit en utilisant les résultats de la question 17 que

$$\max_{F \in \mathscr{F}_k} \min_{X \in F \setminus \{O\}} \frac{X^\top A X}{X^\top X} \geqslant \min_{X \in F_k \setminus \{O\}} \frac{X^\top A X}{X^\top X} = \lambda_k.$$

D'autre part, pour $F \in \mathscr{F}_k$, on peut choisir X_0 non nul dans $F \cap \mathrm{Vect}(C_k, C_{k+1}, \ldots, C_n)$ puisque cet espace vectoriel est de dimension non nulle. On en déduit :

$$\min_{X \in F \setminus \{O\}} \frac{X^\top A X}{X^\top X} \leqslant \frac{X_0^\top A X_0}{X_0^\top X_0} \leqslant \lambda_k.$$

Ceci étant vrai pour tout sous-espace vectoriel F de $\mathscr{F}_k$,

$$\max_{F \in \mathscr{F}_k} \min_{X \in F \setminus \{O\}} \frac{X^\top A X}{X^\top X} \leqslant \lambda_k.$$

Ceci achève la preuve du théorème de Courant et Fischer.

B - Calcul de $d(A, \nabla_p)$

20) On utilise la décomposition polaire de A. Il existe $U \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ telles que $A = US$. Maintenant, d'après le théorème spectral, il existe $P \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $S = P^{-1}DP$ où P est diagonale. On a donc, $A = UP^{-1}DP$. En posant $E = UP^{-1}$ on a $A = UEP$ où U est orthogonale comme produit de deux matrices orthogonales, D diagonale à termes positifs car ses coefficients diagonaux sont les valeurs propres de S qui sont positives d'après la question 9 et P orthogonale par construction.

On en déduit que $\mathrm{rg}A = \mathrm{rg}D = \mathrm{rg}D^2 = \mathrm{rg}A^\top A$ puisque A est équivalente à D, D est diagonale et D^2 est semblable à $A^\top A$.

Remarque : il est plus rapide de montrer (classiquement) que A et $A^\top A$ ont même noyau.

21) Comme D est diagonale, la matrice ED est obtenue à partir de la matrice E en multipliant la j-ième colonne par le coefficient $d_{jj} = \sqrt{\mu_j}$ de D. De ce fait, $ED = \sum\limits_{l=1}^{n} \sqrt{\mu_l} M_l$.

Posons $R_l = M_l P$ pour l compris entre 1 et n. On a ainsi $A = EDP = \sum\limits_{i=1}^{n} \sqrt{\mu_l}\ R_l = \sum\limits_{i=1}^{r} \sqrt{\mu_l}\ R_l$ et on vérifie facilement que (R_l) est orthonormale :

$$(R_l \mid R_k) = \mathrm{tr}(P^\top M_l^\top M_k P) = \mathrm{tr}(M_l^\top M_k P P^\top) = \mathrm{tr}(M_l^\top M_k)$$

or $M_l^\top M_k$ a tous ses termes nuls, sauf peut-être celui d'indice (l, k) qui est égal au produit scalaire des l-ième et k-ième colonnes de E. Comme E est orthogonale, on obtient bien $(R_l, R_k) = 0$ si $l \neq k$ et $(R_l, R_k) = 1$ si $l = k$.

Enfin, chaque R_l est de rang 1 car $\mathrm{rg}R_l = \mathrm{rg}M_l = 1$ (P est inversible et M_l a une et une seule colonne non nulle).

22) On a clairement $\mathrm{Im}N \subset \mathrm{Im}R_1 + \mathrm{Im}R_2 + \cdots + \mathrm{Im}R_p$, puis $\mathrm{rg}N \leqslant p$ (les $\mathrm{Im}R_i$ sont des droites).

Comme $N \in \nabla_p$, $d(A,\nabla_p) \leqslant d(A,N) = \left\| \sum_{l=p+1}^{r} \sqrt{\mu_i}\ R_i \right\| = \sqrt{\sum_{l=p+1}^{r} \mu_i}$ car (R_i) est une famille orthonormale.

23) a) $\dim G = \dim \mathrm{Ker}M + \dim \mathrm{Im}A^\top A - \dim \mathrm{Ker}M \cup \mathrm{Im}A^\top A \geqslant (n-p) + r - n = r - p$.

b) En appliquant le théorème de Courant et Fischer (plus exactement en appliquant la question 19) à la matrice ${}^t(A-M)(A-M)$, nous obtenons :

$$\alpha_k \geqslant \min_{X \in F \setminus \{0\}} \frac{X^{\top t}(A-M)(A-M)X}{X^\top X}$$

mais pour $X \in F$ (donc $X \in G$), $MX = 0$ et $X^\top M^\top = 0$, donc $\dfrac{X^\top (A-M)^\top (A-M)X}{X^\top X} = \dfrac{X^\top A^\top AX}{X^\top X}$. De ce fait,

$$\alpha_k \geqslant \min_{X \in F \setminus \{0\}} \frac{X^\top A^\top AX}{X^\top X}.$$

c) On a $G \cap \mathrm{Vect}(V_1,\dots,V_{k+p}) = \mathrm{Ker}M \cap \mathrm{Vect}(V_1,\dots,V_{k+p})$ car $\mathrm{Vect}(V_1,\dots,V_{k+p}) \subset \mathrm{Vect}(V_1,\dots,V_r) = \mathrm{Im}A^\top A$ (on a $k \leqslant r-p$). On en déduit donc (comme au 18.a) que $G \cap \mathrm{Vect}(V_1,\dots,V_{k+p})$ est de dimension au moins $(k+p) + (n-p) - n = k$.

d) Comme $G \cap \mathrm{Vect}(V_1,\dots,V_{k+p})$ est de dimension au moins égale à k, on peut choisir un sous-espace F de dimension k contenu dans $G \cap \mathrm{Vect}(V_1,\dots,V_{k+p})$. Nous avons alors :

- $\alpha_k \geqslant \min_{X \in F \setminus \{O\}} \dfrac{X^\top A^\top AX}{X^\top X}$ d'après le 18.b ;
- Comme $F \subset \mathrm{Vect}(V_1,\dots,V_{k+p}) = H_{k+p}$, on a

$$\min_{X \in F \setminus \{O\}} \frac{X^\top A^\top AX}{X^\top X} \geqslant \min_{X \in H_{k+p} \setminus \{O\}} \frac{X^\top A^\top AX}{X^\top X} = \mu_{k+p}$$

La dernière égalité a été prouvée à la question 17.

On en déduit l'inégalité demandée : $\alpha_k \geqslant \mu_{k+p}$.

24) Soit M une matrice de rang $q \leqslant p < r$. En reprenant les notations et les résultats de la question 18, et en remplaçant p par q (l'inégalité obtenue fonctionne aussi quand $q = 0$), nous obtenons :

$$d^2(A,M) = \mathrm{tr}(A-M)^\top (A+M) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \geqslant \sum_{i=1}^{r-q} \alpha_i \geqslant \sum_{i=1}^{r-q} \mu_{i+q} = \sum_{i=q+1}^{r} \mu_i \geqslant \sum_{i=p+1}^{r} \mu_i.$$

On en déduit que $d(A,\nabla_p) \geqslant \sqrt{\sum_{i=p+1}^{r} \mu_i}$, ce qui donne, avec la question 22 :

$$d(A,\nabla_p) = \sqrt{\sum_{l=p+1}^{r} \mu_i}$$

où les μ_i sont les valeurs propres (décroissantes) de $A^\top A$.

25) Ici, nous avons $\mu_1 = 16$, $\mu_2 = \mu_3 = 1$ et $r = 3$. Nous en déduisons donc :

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \|\Gamma\| = 3\sqrt{2} \\ \gamma_1 &= \sqrt{2} \\ \gamma_2 &= 1 \\ \gamma_3 &= d(\Gamma,\Gamma) = 0. \end{aligned}$$