L'usage des calculatrices est interdit. Ce sujet est fort long, le barème en tiendra compte.

Calculs de distances entre une matrice et certaines parties de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$

Notations : Dans ce sujet, n est un entier naturel non nul et on note :

— $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$: la $\mathbb{R}$-algèbre des matrices carrées réelles d'ordre n.
— $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$: le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des matrices à n lignes et à une colonne.
— Pour une matrice A de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $A^\top$ est sa matrice transposée, $\mathrm{rg}(A)$ son rang et $\mathrm{tr}(A)$ sa trace.
— I_n : la matrice unité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
— $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$: le sous-espace vectoriel des matrices symétriques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
— $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$: le sous-espace vectoriel des matrices antisymétriques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
— $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$: l'ensemble des matrices de $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ vérifiant : $\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ X^\top AX \geqslant 0$.
— $GL_n(\mathbb{R})$: le groupe des matrices inversibles de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
— $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$: le groupe des matrices réelles orthogonales c'est-à-dire des matrices M de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant : $M^\top M = I_n$.
— Pour p entier naturel, Δ_p est l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de rang supérieur ou égal à p et ∇_p est l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de rang inférieur ou égal à p.
— Pour tous réels $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, on note $\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Remarque : dans le texte, le terme « positif » signifie « supérieur ou égal à 0 ».

On note $\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

Objectifs : Le but du sujet est de calculer la distance (par la norme de Schur définie à la question I.1) d'une matrice à :
dans la partie I, $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ par le théorème de projection orthogonale,
dans la partie II, Δ_p par des notions de densité,
dans la partie III, $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ par le théorème de décomposition polaire,
dans la partie IV, ∇_p par le théorème de Courant et Fischer.

I - Calcul de la distance d'une matrice à $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et à $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$

1. Soit $A = (a_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ et $B = (b_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $(A|B) = \mathrm{tr}(A^\top B)$.
   Exprimer $(A|B)$ en fonction des coefficients de A et de B.
   On définit donc un produit scalaire (produit de Schur) sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ pour lequel la base canonique est orthonormée. La norme associée à ce produit scalaire (norme de Schur) est notée : $\|A\| = (A|A)^{\frac{1}{2}}$.
   Exprimer $||A||$ en fonction des coefficients de A.

Dans tout le sujet, si Π est une partie non vide de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, la distance d'une matrice A de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ à la partie Π est le réel $d(A,\Pi) = \inf\limits_{M\in\Pi} \|A - M\|$.

2. Montrer que $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ et que cette somme directe est orthogonale.
3. Si A est une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que $d(A, \mathscr{S}_n(\mathbb{R})) = \left|\left|\frac{1}{2}(A - A^\top)\right|\right|$ et déterminer de même $d(A, \mathscr{A}_n(\mathbb{R}))$.
4. Calculer $d(\Gamma, \mathscr{A}_3(\mathbb{R}))$ où Γ est la matrice définie dans le préambule.
5. Justifier que $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
   Montrer qu'il en va de même pour Δ_p ou ∇_p, sauf pour certaines valeurs de p que l'on précisera.
   Ainsi ce qui suit ne relève pas du théorème de projection orthogonale.

II - Calcul de la distance d'une matrice à Δ_p

6. a) Soit M un élément de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, montrer qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que pour tout réel λ vérifiant $0 < \lambda < \alpha$, la matrice $M - \lambda I_n$ est inversible.
   b) En déduire que $GL_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
7. Soit A un élément de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, déterminer $d(A, \Delta_n)$, puis, pour tout entier naturel $p \leqslant n$, $d(A, \Delta_p)$.

III - Calcul de la distance d'une matrice à $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$

A - Théorème de la décomposition polaire

8. Un exemple
   a) Calculer $H = \Gamma^\top\Gamma$ où Γ est la matrice définie dans le préambule.
   b) Déterminer une matrice P de $\mathscr{O}_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}P$ soit diagonale.
   c) En déduire une matrice diagonale D à coefficients tous positifs telles que $D^2 = P^{-1}HP$.
   d) On pose $S = PDP^{-1}$. Vérifier que S est inversible et en déduire que la relation $\Gamma = US$ définit une matrice $U \in \mathscr{O}_3(\mathbb{R})$. On ne demande pas de calculer les coefficients de U.
9. Montrer qu'une matrice S de $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ appartient à $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ si et seulement si toutes les valeurs propres de S sont positives ou nulles.
10. Soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
    a) Montrer que la matrice $A^\top A$ appartient à $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$.
    b) Montrer qu'il existe une matrice P de $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ et une matrice $D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale à coefficients tous positifs telles que $D^2 = P^{-1}\, A^\top AP$.
    c) On pose $S = PDP^{-1}$. Justifier que $S \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$.
    d) On suppose que A est inversible. Montrer que la matrice $V = SA^{-1}$ est orthogonale. En déduire qu'il existe une matrice orthogonale U telle que $A = US$.
    e) On ne suppose plus A inversible.
       D'après la question 6.(b) il existe une suite $(A_p)_{p\geqslant 0}$ de matrices inversibles convergeant vers A. D'après les questions précédentes, il existe alors des suites $(S_p)_{p\geqslant 0} \in (\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R}))^{\mathbb{N}}$ et $(U_p)_{p\geqslant 0} \in (\mathscr{O}_n(\mathbb{R}))^{\mathbb{N}}$ telles que $\forall p \in \mathbb{N},\ A_p = U_pS_p$.

i) Montrer que $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ est compact. Il existe ainsi une extractrice φ telle que la suite $(U_{\varphi(p)})_{p\geqslant 0}$ converge vers une matrice $U \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$.

ii) Montrer que $(S_{\varphi(p)})_{p\geqslant 0}$ converge vers une matrice S appartenant à $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ et que $A = US$.

On a ainsi démontré le théorème de décomposition polaire : pour toute matrice A de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, il existe une matrice U de $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ et une matrice S de $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ telles que $A = US$.

B - Calcul de $d(A, \mathscr{O}_n(\mathbb{R}))$

11. Montrer que, pour toute matrice M de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et pour toute matrice Ω de $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$, $\|M\Omega\| = \|\Omega M\| = \|M\|$.

Dans la suite de cette partie, on considère A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

12. Soit $U \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ telles que $A = US$; il existe alors une matrice diagonale D et une matrice P de $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ telles que $S = PDP^{-1}$.

   a) Montrer que, pour toute matrice Ω de $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$, $\|A - \Omega\| = \|S - U^{-1}\Omega\|$ et en déduire soigneusement que $d(A, \mathscr{O}_n(\mathbb{R})) = d(S, \mathscr{O}_n(\mathbb{R}))$.

   b) Montrer que, $d(A, \mathscr{O}_n(\mathbb{R})) = d(D, \mathscr{O}_n(\mathbb{R}))$

13. On note $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_n)$.

   a) Montrer que pour toute matrice Ω de $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$, $\|D - \Omega\|^2 = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i^2\right) - 2\operatorname{tr}(D\Omega) + n$

   b) Montrer que pour toute matrice Ω de $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$, $\operatorname{tr}(D\Omega) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i$.

   c) Conclure que $d(D, \mathscr{O}_n(\mathbb{R})) = \|D - I_n\|$.

14. Calculer $d(\Gamma, \mathscr{O}_3(\mathbb{R}))$ où Γ est la matrice exemple définie dans le préambule.

15. Montrer que, $d(A, \mathscr{O}_n(\mathbb{R})) = \|A - U\|$.

IV - Calcul de la distance d'une matrice à ∇_p

A - Théorème de Courant et Fischer

Soit A une matrice de $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. On note $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant .. \geqslant \lambda_n$ ses valeurs propres répétées selon leurs multiplicités. On note $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_n)$. On note P une matrice de $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A = PDP^\top$ et $C_1, C_2, .., C_n$ les matrices de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formant les colonnes de la matrice P ; la famille $(C_1, C_2, \ldots, C_n)$ est donc une base orthonormée de vecteurs propres de A.

Si k est un entier entre 1 et n, on note $\mathscr{F}_k$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de dimension k.

Nous allons montrer que : $\lambda_k = \max\limits_{F \in \mathscr{F}_k} \min\limits_{X \in F\setminus\{0\}} \dfrac{X^\top AX}{X^\top X}$ (théorème de Courant et Fischer).

16. Soit X un vecteur de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de coordonnées $(x_1', x_2', .., x_n')$ dans la base orthonormée $(C_1, C_2, .., C_n)$ de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Calculer en fonction des x_i' et λ_i (où i compris entre 1 et n) : $X^\top AX$ et $X^\top X$. En déduire, pour k entier entre 1 et n, $\dfrac{C_k^\top AC_k}{C_k^\top C_k}$.

17. Soit k entier entre 1 et n, on pose $F_k = \operatorname{Vect}\{C_1, C_2, .., C_k\}$. Montrer que pour tout X non nul de F_k, $\dfrac{X^\top AX}{X^\top X} \geqslant \lambda_k$ et déterminer $\min\limits_{X \in F_k\setminus\{0\}} \dfrac{X^\top AX}{X^\top X}$.

18. Soit $F \in \mathscr{F}_k$

   a) Montrer que $\dim(F \cap \operatorname{Vect}\{C_k, C_{k+1}, .., C_n\}) \geqslant 1$.

   b) Si X est un vecteur non nul de $\operatorname{Vect}\{C_k, C_{k+1}, .., C_n\}$, montrer que $\dfrac{X^\top AX}{X^\top X} \leqslant \lambda_k$.

19. Conclure.

B - Calcul de $d(A, \nabla_p)$

Dans toute cette partie : A est une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de rang r et p est un entier naturel, $p < r$.

20. Montrer qu'il existe deux matrices E et P de $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale D à coefficients positifs telles que $A = EDP$. *On pourra utiliser la décomposition polaire de A - question 10.*
   En déduire que le rang de la matrice $A^\top A$ est encore r.

21. On note les valeurs propres (répétées selon leur multiplicité) de la matrice symétrique réelle $A^\top A$ de rang r : $\mu_1 \geqslant \mu_2 \geqslant .. \geqslant \mu_r > 0$ et $\mu_{r+1} = .. = \mu_n = 0$ et on pose $D = \text{diag}(\sqrt{\mu_1}, \sqrt{\mu_2}, .., \sqrt{\mu_r}, 0..., 0)$. Soit $E \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ associée à cette matrice D comme à la question 20. Pour tout $l \in [\![1, n]\!]$, on note M_l la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont la l-ième colonne est celle de E, tous les autres termes de M_l étant nuls.
   Vérifier que : $ED = \sum\limits_{l=1}^{n} \sqrt{\mu_l} M_l$.
   Montrer alors qu'il existe une famille orthonormale $(R_1, R_2, .., R_n)$ de matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ (pour le produit scalaire $(A|B) = \text{tr}(A^\top B)$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$), toutes de rang un, et telles que
   $$A = \sum_{l=1}^{n} \sqrt{\mu_l} R_l = \sum_{l=1}^{r} \sqrt{\mu_l} R_l.$$

22. Avec les notations de la question 21., on pose $N = \sum\limits_{l=1}^{p} \sqrt{\mu_l} R_l$.
   Montrer que $\text{rg}(N) \leqslant p$ puis que $d(A, \nabla_p) \leqslant \sqrt{\mu_{p+1} + .. + \mu_r}$.

23. Soit M une matrice de rang p ($p < r$), on note $\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \alpha_n \geqslant 0$ les valeurs propres de la matrice ${}^t(A - M)(A - M)$ et on pose $G = \text{Ker} M \cap \text{Im}(A^\top A)$.
   Soit k un entier compris entre 1 et $r - p$.

   a) Montrer que $\dim G \geqslant r - p$.

   b) Soit F un sous-espace vectoriel de G de dimension k, montrer que : $\alpha_k \geqslant \min\limits_{X \in F \setminus \{0\}} \dfrac{X^\top A^\top A X}{X^\top X}$.

   c) On note $(V_1, V_2, .., V_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de la matrice $A^\top A$, le vecteur V_i étant associé à la valeur propre μ_i de telle sorte que : $\mu_1 \geqslant \mu_2 \geqslant .. \geqslant \mu_r > 0$ et $\mu_{r+1} = .. = \mu_n = 0$.
   Montrer que $\dim(G \cap \text{Vect}\{V_1, V_2, .., V_{k+p}\}) \geqslant k$.

   d) En déduire que $\alpha_k \geqslant \mu_{k+p}$.

24. En déduire $d(A, \nabla_p)$.

25. Calculer, pour $p \in \{0, 1, 2, 3\}$, $\gamma_p = d(\Gamma, \nabla_p)$ où Γ est la matrice exemple définie dans le préambule.