Exercice

1. On calcule le polynôme caractéristique : $\chi_A = (X-1)(X-3)+1 = X^2-4X+4 = \boxed{(X-2)^2}$.
Par le théorème de Cayley-Hamilton, $\boxed{0 = \chi_A(A) = (A-2I_2)^2}$
Ainsi $B = A - 2I_2$ est nilpotente d'indice de nilpotence 2 (car $B \neq 0$).
Soit $t \in \mathbb{R}$. Comme $tA = 2tI_2 + tB$ et comme $2tI_2$ et tB commutent, on a :

$$\exp(tA) = \exp(2tI_2)\exp(tB) = e^{2t}I_2\exp(tB) = e^{2t}\exp(tB)$$

La matrice tB étant aussi nilpotente d'indice 2,

$$\exp(tA) = e^{2t}(I_2 + tB)$$

2. Posant $X : t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, le système différentiel de l'énoncé s'écrit $X' = AX$ et la condition initiale s'écrit $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
L'unique solution de ce problème de Cauchy à coefficients constants est donné par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ X(t) = \exp(tA)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = e^{2t}\exp(tB)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = e^{2t}(I_2 + tB)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Or $I_2 + tB = (1-2t)I_2 + tA = \begin{pmatrix} 1-t & -t \\ t & 1+t \end{pmatrix}$.
Ainsi la solution recherchée est donnée par

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} x(t) &= e^{2t}((1-t)1 + (-t)2) &= e^{2t}(1-3t) \\ y(t) &= e^{2t}(t.1 + (1+t)2) &= e^{2t}(2+3t) \end{cases}}$$

Problème

0. multipliant par l'expression conjuguée on obtient :

$$\frac{1}{x+ia} = \frac{x-ia}{x^2+a^2} = \frac{1}{2}\frac{2x}{x^2+a^2} - ia\frac{1}{x^2+a^2}$$

On en déduit que

$$\int \frac{1}{x+ia}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+a^2}dx - ia\int \frac{1}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+a^2) - i\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

1. a) Au voisinage de 0 on a : $f_{\alpha,\lambda}(t) = t^\alpha e^{-\lambda t} \sim t^\alpha$.
Si $\alpha > 0$: $\lim\limits_{t \to 0^+} f_{\alpha,\lambda}(t) = 0$
Si $\alpha = 0$: $\lim\limits_{t \to 0^+} f_{\alpha,\lambda}(t) = 1$
Si $\alpha < 0$: $\lim\limits_{t \to 0^+} f_{\alpha,\lambda}(t) = +\infty$
L'ensemble des couples (α, λ) tels que la limite est réelle est donc $\boxed{A = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*}$.

   b) — La fonction $f_{\alpha,\lambda} \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$.

— Étude en 0 : on a $f_{\alpha,\lambda}(t) \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{t^{-\alpha}}$; par comparaison pour les fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f_{\alpha,\lambda}(t)dt$ converge si et seulement si$-\alpha < 1$, c'est-à-dire $\alpha > -1$.

— Étude en $+\infty$: comme $\lambda > 0$, $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^{\alpha+2}e^{-\lambda t} = 0$ donc $f_{\alpha,\lambda}(t) = \underset{+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$. On sait que $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$, on en déduit $f_{\alpha,\lambda}$ aussi et que $\displaystyle\int_1^{+\infty} f_{\alpha,\lambda}(t)dt$ converge pour tout α.

L'ensemble des couples (α, λ) tels que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_{\alpha,\lambda}(t)dt$ converge est donc $\boxed{B =]-1, +\infty[\times\mathbb{R}_+^*}$.

2. — Les deux fonctions considérées sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$.

— On remarque que $\left|\frac{e^{-t}\cos(tx)}{\sqrt{t}}\right| \leqslant \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} = f_{-\frac{1}{2},1}(t)$ qui est intégrable sur $]0, +\infty[$ puisque $-\frac{1}{2} > -1$, on déduit que $t \mapsto \frac{e^{-t}\cos(tx)}{\sqrt{t}}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ d'après la question 1.b) et les critères de comparaison.

— De même, $\left|\frac{e^{-t}\sin(tx)}{\sqrt{t}}\right| \leqslant \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$ entraîne que $t \mapsto \frac{e^{-t}\sin(tx)}{\sqrt{t}}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

$\boxed{\text{Les fonctions } t \mapsto \frac{e^{-t}\cos(tx)}{\sqrt{t}} \text{ et } t \mapsto \frac{e^{-t}\sin(tx)}{\sqrt{t}} \text{ sont intégrables sur }]0, +\infty[}$.

3. Puisque la fonction cosinus est paire, $\boxed{\text{la fonction définie par } U(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}\cos(tx)}{\sqrt{t}}dt \text{ est paire}}$.

Puisque la fonction sinus est impaire, $\boxed{\text{la fonction définie par } V(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}\sin(tx)}{\sqrt{t}}dt \text{ est impaire}}$.

4. La fonction définie par $\varphi(u) = u^2$ est une bijection strictement croissante de classe $\mathscr{C}^1$ de $]0, +\infty[$ dans $]0, +\infty[$. On peut donc effectuer le changement de variable $t = \varphi(u) = u^2$ dans l'intégrale convergente $U(0)$:

$$U(0) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u^2}}{u}2udu = \sqrt{\pi}$$

avec le résultat admis par l'énoncé : $\boxed{U(0) = \sqrt{\pi}}$.

5. Pour $x > 0$, on pose

$$W(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}(\cos(tx) + i\sin(tx))}{\sqrt{t}}dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t+ixt}}{\sqrt{t}}dt$$

a) Appliquons le théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre. On pose $f(x,t) = \frac{e^{-t+ixt}}{\sqrt{t}}$.

i) $\forall x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux $\mathbb{R}_+^*$

ii) $\forall x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ puisque $|f(x,t)| = \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} = f_{-\frac{1}{2},1}(t)$ avec $-\frac{1}{2} > -1$ (question 1.b)).

iii) $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}_+^*, \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = it\frac{e^{-t+ixt}}{\sqrt{t}} = i\sqrt{t}e^{-t+ixt}$$

iv) La fonction $(x,t) \mapsto i\sqrt{t}e^{-t+ixt}$ vérifie les hypothèses du théorème de continuité des intégrales à paramètres :

$\alpha)$ $\forall x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto i\sqrt{t}\,e^{-t+ixt}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$.

$\beta)$ $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto i\sqrt{t}\,e^{-t+ixt}$ est continues (cela découle de iii)).

$\gamma)$ Domination : Pour tout $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, $\left|\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}\right| = |i\sqrt{t}\, e^{-t+ixt}| = \sqrt{t}\, e^{-t} = f_{\frac{1}{2},1}(t)$ qui est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ par 1.b) car $\frac{1}{2} > -1$.

On en déduit que $\boxed{\text{la fonction } W \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ avec } W'(x) = \int_0^{+\infty} i\sqrt{t}\, e^{-t+ixt} dt}$.

b) On intègre par parties en posant $u'(t) = e^{-t+ixt}$ et $v(t) = i\sqrt{t}$, d'où $u(t) = \dfrac{e^{-t+ixt}}{(-1+ix)}$ et $v'(t) = \dfrac{i}{2\sqrt{t}}$.
Les fonctions u et v sont bien de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
On a alors

$$W'(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t+ixt} i\sqrt{t}\, dt = \left[\frac{e^{-t+ixt}}{(-1+ix)} i\sqrt{t}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t+ixt}}{(-1+ix)} \frac{i}{2\sqrt{t}} dt$$

car $|u(t)v(t)| = \left|\frac{e^{-t+ixt}}{(-1+ix)} i\sqrt{t}\right| = \frac{e^{-t}}{|-1+ix|}\sqrt{t}$ a pour limite 0 en 0 et aussi en $+\infty$ (par croissance comparée de $\sqrt{t}$ et e^t). On en déduit $W'(x) = \frac{-i}{2(-1+ix)} W(x) = \frac{-1}{2(x+i)} W(x)$.

$\boxed{\text{La fonction } W \text{ est donc solution sur } \mathbb{R} \text{ de l'équation différentielle } W'(x) + \frac{1}{2(x+i)} W(x) = 0}$

c) La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x+i}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ puisque c'est une fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas.
On montre par récurrence sur n que pour tout entier naturel n, la fonction W est de classe $\mathscr{C}^n$ sur $\mathbb{R}$.
— $\boxed{\text{I}}$: On l'a montré pour $n = 1$ (et c'est donc aussi vrai pour $n = 0$).
— $\boxed{\text{H}}$ Soit $n \geqslant 0$. On suppose W de classe $\mathscr{C}^n$. L'égalité $W'(x) = \frac{-1}{2(x+i)} W(x)$ montre que W' est aussi de classe $\mathscr{C}^n$, donc W est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$.
— $\boxed{\text{C}}$ On a montré que W est de classe $\mathscr{C}^n$ pour tout n, donc de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Les fonctions U et V désignant les parties réelle et imaginaire de W, $\boxed{U \text{ et } V \text{ sont aussi de classe } \mathscr{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R}}$.

d) Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$U'(x) + iV'(x) = W'(x) = \frac{-W(x)}{2(x+i)} = -\frac{(x-i)(U(x)+iV(x))}{2(x^2+1)} = -\frac{xU(x)+V(x)+i(-U(x)+xV(x))}{2(x^2+1)}$$

On en déduit en séparant partie réelle et partie imaginaire :
$\boxed{U'(x) = -\frac{xU(x)+V(x)}{2(x^2+1)}}$ et $\boxed{V'(x) = \frac{U(x)-xV(x)}{2(x^2+1)}}$ pour tout x réel.

6. La fonction g est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et $|g(t)| \leqslant f_{-\frac{1}{2},\lambda}(t)$ qui est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ par la question 1.b) puisque $-\frac{1}{2} > -1$. On en déduit que $\boxed{g \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}_+^*}$.

7. a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Effectuons le changement de variable affine $u = n\pi + t$ dans l'intégrale qui définit a_n :

$$a_n = (-1)^n \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{1}{\sqrt{u}} e^{-\lambda u} \sin(u) du = (-1)^n \int_0^\pi \frac{1}{\sqrt{n\pi+t}} e^{-\lambda(n\pi+t)} \sin(n\pi+t) dt$$

Puisque $\sin(n\pi+t) = (-1)^n \sin(t)$ on a bien $\boxed{a_n = \int_0^\pi \frac{e^{-\lambda(n\pi+t)}}{\sqrt{n\pi+t}} \sin(t) dt}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

b) La suite $n \mapsto t + n\pi$ étant croissante, la suite $n \mapsto \frac{1}{\sqrt{t+n\pi}} \times e^{-(t+n\pi)}$ est décroissante (produit de deux suites positives et décroissantes).
Comme $\sin(t) \geqslant 0$ quand $0 \leqslant t \leqslant \pi$, on en déduit que la suite $\boxed{(a_n) \text{ est décroissante}}$.

c) Puisque $\lambda(t+n\pi) > 0$ et $0 \leqslant \sin(t) \leqslant 1$, on a pour $n > 0$:

$$0 \leqslant a_n \leqslant \int_0^{\pi} \frac{1}{\sqrt{n\pi}} dt = \frac{\pi}{\sqrt{n\pi}}$$

Le terme de droite tend vers 0 quand n tend vers l'infini, donc $\boxed{\text{la suite } (a_n) \text{ a pour limite } \ell = 0}$.

8. a) On applique le théorème spécial des séries alternées.
   Si une série $(\sum(-1)^n a_n)$ est telle que la suite (a_n) est positive, décroissante et a pour limite 0, alors la série converge. $\boxed{(\sum(-1)^n a_n) \text{ converge}}$.

   b) On voit que

$$a_0 - a_1 = \int_0^{\pi} \left(\frac{e^{-\lambda t}}{\sqrt{t}} - \frac{e^{-\lambda(t+\pi)}}{\sqrt{t+\pi}} \right) \sin(t) dt > 0$$

   car l'intégrande est positive, continue et non identiquement nulle. D'après le théorème des séries alternée, $S \geqslant a_0 - a_1$, donc $\boxed{S > 0}$.

   c) Soit $N \in \mathbb{N}$,

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} (-1)^n a_n = \sum_{n=0}^{N} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} g(t)dt = \int_0^{(N+1)\pi} g(t)dt$$

   par la relation de Chasles.
   Puisque la série converge et que la fonction g est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ on peut passer à la limite et obtenir $\boxed{\int_0^{+\infty} g(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n = S}$.

9. Pour $x > 0$, le changement de variable affine $u = tx$ définit une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}_+^*$ dans lui-même. On a donc

$$V(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}\sin(tx)}{\sqrt{t}} dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u/x}\sin(u)}{\sqrt{u/x}} \frac{1}{x} du = \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u/x}\sin(u)}{\sqrt{u}} du$$

On reconnait l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)dt$ dans laquelle on a posé $\lambda = \frac{1}{x}$. Cette intégrale étant strictement positive d'après la question précédente, on en déduit que $\boxed{V(x) > 0 \text{ pour } x > 0}$.

10. a) Comme $V > 0$, les fonctions R et T sont définies sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus U et V sont continues sur $\mathbb{R}$ (question 5.c)).
    On sait que $U(0) = \sqrt{\pi}$ d'après la question 4). De plus $V(0) = 0$ (expression de V donnée en question 2)).
    On en déduit que $\boxed{R \text{ est prolongeable par continuité en } 0^+ \text{ en posant } R(0) = U(0) = \sqrt{\pi}}$.
    Comme $V(x) > 0$ pour $x > 0$ d'après la question précédente, $\lim\limits_{x\to 0^+} V(x) = 0^+$, donc $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{U(x)}{V(x)} = +\infty$, et $\lim\limits_{x\to 0^+} T(x) = \frac{\pi}{2}$.
    On en déduit que $\boxed{T \text{ est prolongeable par continuité en } 0^+ \text{ en posant } T(0) = \frac{\pi}{2}}$.

    b) — Les fonctions U et V sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, donc $U^2 + V^2$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ car $V(x) > 0$ pour $x > 0$. Par classe $\mathscr{C}^1$ de la fonction racine sur $\mathbb{R}_+^*$, on obtient par composition que $\boxed{R \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}_+^*}$.
    — De même, $\frac{U}{V}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ car $V(x) > 0$ pour $x > 0$. Par classe $\mathscr{C}^1$ de la fonction arctangente sur $\mathbb{R}$, on obtient par composition que $\boxed{T \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}_+^*}$.

c) — Dérivons : $R' = \frac{UU'+VV'}{R}$. D'après la question 5.d), $(UU'+VV')(x) = \dfrac{-x(U^2(x)+V^2(x))}{2(x^2+1)}$.

On en déduit que R vérifie l'équation différentielle : $\boxed{y'(x) + \frac{x}{2(x^2+1)}y(x) = 0}$.

— De même, $T' = \dfrac{VU'-UV'}{V^2}\dfrac{1}{1+(\frac{U}{V})^2} = \dfrac{VU'-UV'}{U^2+V^2}$.

D'après la question 5.d), $(VU'-UV')(x) = \dfrac{-(U^2(x)+V^2(x))}{2(x^2+1)}$.

On en déduit que T vérifie l'équation différentielle : $\boxed{y'(x) = \dfrac{-1}{2(x^2+1)}}$.

d) — D'après le cours, les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle linéaire du premier ordre homogène $y'(x) + \frac{x}{2(x^2+1)}y(x) = 0$ sont de la forme $y(x) = K_1 \exp[-\frac{1}{4}\ln(1+x^2)] = \frac{K_1}{(1+x^2)^{\frac{1}{4}}}$, avec $K_1 \in \mathbb{R}$: $\boxed{y(x) = \frac{K_1}{(1+x^2)^{\frac{1}{4}}}}$.

— Il s'agit d'une primitive connue. On obtient donc comme solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle linéaire du premier ordre $y'(x) = \frac{-1}{2(x^2+1)}$: $\boxed{y(x) = -\frac{1}{2}\arctan(x) + K_2}$, avec $K_2 \in \mathbb{R}$.

e) On utilise la question 10.a).

— On obtient sur $\mathbb{R}_+$: $R(x) = \frac{R(0)}{(1+x^2)^{\frac{1}{4}}}$, soit : $\boxed{R(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{(1+x^2)^{\frac{1}{4}}}}$ pour $x \geqslant 0$.

— De même on obtient sur $\mathbb{R}_+$: $T(x) = T(0) - \frac{1}{2}\arctan(x)$, soit : $\boxed{T(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arctan(x)}$ pour $x \geqslant 0$.

11. On déduit des expressions de R et T données en question 10) que $U = V\tan(T)$, donc $R^2 = V^2(1+\tan^2(T))$, et $V^2 = R^2\cos^2(T)$.

— Comme $T = \arctan(U/V)$ et $T(0) = \pi/2$, T est à valeurs dans $]-\pi/2, +\pi/2]$ donc $\cos(T) \geqslant 0$. Comme V et R sont à valeurs positives ou nulles, on en déduit $V = R\cos(T)$ sur $\mathbb{R}^+$.
On obtient alors sur $\mathbb{R}_+$: $V(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{(1+x^2)^{\frac{1}{4}}}\sin\left(\frac{1}{2}\arctan(x)\right)$.
On remarque que la fonction $x \mapsto \frac{\sqrt{\pi}}{(1+x^2)^{\frac{1}{4}}}\sin\left(\frac{1}{2}\arctan(x)\right)$ est définie sur $\mathbb{R}$, est impaire, et coïncide avec V sur $\mathbb{R}_+$. Or V est impaire.
On en déduit que $\boxed{V(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{(1+x^2)^{\frac{1}{4}}}\sin\left(\frac{1}{2}\arctan(x)\right) \text{ pour tout } x \text{ réel}}$.

— De $U = V\tan(T)$ sur $\mathbb{R}_+^*$ on déduit : $U(x) = \frac{V(x)}{\tan(\frac{1}{2}\arctan(x))} = \frac{\sqrt{\pi}}{(1+x^2)^{\frac{1}{4}}}\cos\left(\frac{1}{2}\arctan(x)\right)$, qui est valable aussi pour $x = 0$.
La fonction $x \mapsto \frac{\sqrt{\pi}}{(1+x^2)^{\frac{1}{4}}}\cos\left(\frac{1}{2}\arctan(x)\right)$ est définie sur $\mathbb{R}$, est paire, et coïncide avec U sur $\mathbb{R}_+$. U est paire. On obtient de même que pour V : $\boxed{U(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{(1+x^2)^{\frac{1}{4}}}\cos\left(\frac{1}{2}\arctan(x)\right) \text{ pour tout } x \text{ réel}}$.

12. Résolvons l'équation différentielle linéaire du premier ordre homogène de la question 5.b) :

$$y'(x) + \frac{1}{2(x+i)}y(x) = 0$$

D'après la question préliminaire, $\displaystyle\int \frac{1}{x+i}dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - i\arctan(x) + C$.
On obtient donc les solutions sur $\mathbb{R}$: $y(x) = K\exp\left[-\frac{1}{4}\ln(x^2+1) + \frac{i}{2}\arctan(x)\right] = \frac{K}{(1+x^2)^{\frac{1}{4}}}\exp\left[\frac{i}{2}\arctan(x)\right]$.

Comme $W(0) = \sqrt{\pi}$, on obtient : $\boxed{W(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{(1+x^2)^{\frac{1}{4}}}\exp\left[\frac{i}{2}\arctan(x)\right]}$ pour tout x réel.

En prenant les parties réelle et imaginaire de W, on retrouve bien les expressions des fonctions U et V obtenues en question 11).

13. Les existences des U_n et V_n sur $\mathbb{R}$ proviennent du même raisonnement que celui utilisé en question 2), $f_{-\frac{1}{2},1}$ étant intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

a) Calculons pour tout x réel :

$$U_2(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \frac{1+\cos(2xt)}{2} dt = \frac{1}{2}(U(0) + U(2x))$$

De même,

$$V_2(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \frac{1-\cos(2xt)}{2} dt = \frac{1}{2}(U(0) - U(2x))$$

On obtient $\boxed{U_2(x) = \frac{1}{2}(\sqrt{\pi} + U(2x))}$ et $\boxed{V_2(x) = \frac{1}{2}(\sqrt{\pi} - U(2x))}$ pour tout x réel.

b) On remarque que les fonctions U_n sont paires, et que $U_n(0) = U(0) = \sqrt{\pi}$.
Soit maintenant $x > 0$ fixé.
On peut écrire $|U_n(x)| \leqslant \displaystyle\int_0^{+\infty} h_n(t)dt$ où l'on a posé $h_n(t) = \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \, |\cos^n(xt)| = f_{-\frac{1}{2},1}(t) \, |\cos(xt)|^n$.
Appliquons le théorème de convergence dominée à la suite des $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

— Les fonctions h_n sont continues par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$.

— Étudions la convergence simple de la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$, donc de la suite $(f_{-\frac{1}{2},1}(t) \, |\cos(xt)|^n)_{n\in\mathbb{N}}$ à t fixé dans $\mathbb{R}_+^*$.
Il s'agit d'une suite géométrique de raison $|\cos(xt)|$, on doit donc distinguer selon que $|\cos(xt)| = 1$ ou $|\cos(xt)| < 1$. Or $|\cos(xt)| = 1$ si et seulement si $t \in (\pi/x)\mathbb{N}^*$. Notons $A = \left\{\frac{k\pi}{x}, k \in \mathbb{N}^*\right\}$.
On en déduit que la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers la fonction $f_{-\frac{1}{2},1} \, \chi_A$, où χ_A désigne la fonction indicatrice de l'ensemble A.

— La fonction χ_A est continue par morceaux sur tout segment inclus dans $\mathbb{R}_+^*$ car sur tout segment elle admet un nombre fini de discontinuités avec existence de limites à gauche et à droite en tout point de discontinuité. La fonction χ_A est donc continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$, donc $f_{-\frac{1}{2},1} \, \chi_A$ aussi.

— Pour tout t de $\mathbb{R}_+^*$ et tout n de $\mathbb{N}$, $|h_n(t)| \leqslant f_{-\frac{1}{2},1}(t)$. D'après la question 1.b), $f_{-\frac{1}{2},1}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. L'hypothèse de domination est bien vérifiée.

On conclut par le théorème que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} h_n(t)dt = \int_0^{+\infty} f_{-\frac{1}{2},1} \, \chi_A = 0$$

d'où $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} U_n(x) = 0$.

Finalement : $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} U_n(0) = \sqrt{\pi}, \text{ et pour tout } x \text{ réel non nul, } \lim_{n\to+\infty} U_n(x) = 0}$.