Le devoir est composé d'un problème et d'un exercice indépendants l'un de l'autre. L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

Exercice

On considère le système différentiel de fonctions inconnues x, y et de variable $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x' &= x - y \\ y' &= x + 3y \end{cases}$$

1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer le polynôme caractéristique de la matrice A et en déduire que la matrice $B = A - 2I_2$ est nilpotente.
   Justifier que pour tout réel t, $\exp(tA) = e^{2t}\exp(tB)$ puis donner l'expression de la matrice $\exp(tA)$.
2. En utilisant ce qui précède, ou à l'aide de toute autre méthode, trouver la solution du système différentiel vérifiant $\begin{cases} x(0) &= 1 \\ y(0) &= 2 \end{cases}$

Problème

Dans tout le problème, λ est un réel strictement positif.

Pour tout réel α et tout réel $\lambda > 0$, on définit l'application $f_{\alpha,\lambda}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ par $t \mapsto t^{\alpha}\mathrm{e}^{-\lambda t}$.

0. Soit a un réel non nul.
   Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction qui à tout réel x associe le nombre complexe $\dfrac{1}{x + \mathrm{i}a}$ où i vérifie $\mathrm{i}^2 = -1$.
1. a) Déterminer l'ensemble A des couples $(\alpha, \lambda) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ tels que : $\lim\limits_{t \to 0,\, t>0} f_{\alpha,\lambda}(t)$ existe et est finie.
   b) Déterminer l'ensemble B des couples $(\alpha, \lambda) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ tels que l'intégrale : $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_{\alpha,\lambda}(t)\mathrm{d}t$ converge.
2. Montrer que pour tout x réel, les fonctions $t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t}\cos(tx)}{\sqrt{t}}$ et $t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t}\sin(tx)}{\sqrt{t}}$ sont intégrables sur $]0, +\infty[$.

On définit alors les deux fonctions U et V par : $U(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}\cos(tx)}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$ et $V(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}\sin(tx)}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$.

3. Étudier la parité des deux fonctions U et V.
4. À l'aide d'un changement de variable que l'on justifiera soigneusement, calculer $U(0)$.
   On pourra utiliser sans démonstration que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2}du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.
5. Pour tout réel x, on pose $W(x) = U(x) + \mathrm{i}V(x)$ où i vérifie $\mathrm{i}^2 = -1$.
   a) Montrer que W est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
   b) Démontrer que la fonction W est solution d'une équation différentielle (E) du premier ordre que l'on explicitera et que l'on ne cherchera pas à résoudre ici. (On pourra utiliser un intégration par parties)
   c) En déduire que U et V sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
   d) Prouver que l'on a pour tout réel x : $\begin{cases} U'(x) = -\dfrac{V(x) + xU(x)}{2(1+x^2)} \\ V'(x) = \dfrac{U(x) - xV(x)}{2(1+x^2)} \end{cases}$

6. Pour tout réel t, on note $g(t) = f_{-1/2,\lambda}(t)\sin(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}}\mathrm{e}^{-\lambda t}\sin(t)$.

   Montrer que g est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

7. On définit la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = (-1)^n \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} g(t)\mathrm{d}t$.

   a) Prouver que pour tout entier naturel n, $a_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{e}^{-\lambda(t+n\pi)}}{\sqrt{t+n\pi}}\sin(t)\mathrm{d}t$.

   b) Montrer que la suite (a_n) est décroissante.

   c) Prouver enfin que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite ℓ que l'on déterminera.

8. a) Justifier que la série $\sum\limits_{k\geqslant 0}(-1)^k a_k$ converge. On note S sa somme.

   b) Montrer que $S > 0$.

   c) En utilisant la somme partielle d'ordre N de la série $\sum\limits_{k\geqslant 0}(-1)^k a_k$, montrer que l'on a

$$\int_0^{+\infty} g(t)\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k a_k$$

9. À l'aide d'un changement de variable, démontrer que pour tout $x > 0$, $V(x) > 0$.

10. Pour tout $x > 0$, on note $R(x) = \left[U^2(x) + V^2(x)\right]^{1/2}$ et $T(x) = \arctan\left(\dfrac{U(x)}{V(x)}\right)$.

    a) Prouver que R et T sont prolongeables par continuité sur $\mathbb{R}_+$.

    b) Montrer que R et T sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

    c) Démontrer alors que R et T sont solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ de deux équations différentielles du premier ordre.

    d) Résoudre ces équations différentielles sur $\mathbb{R}$.

    e) En déduire une expression sur $\mathbb{R}_+$ de R et T à l'aide des fonctions usuelles.

11. Donner des expressions de $U(x)$ et de $V(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

12. Retrouver les résultats obtenus à la question précédente en résolvant l'équation différentielle (E) obtenue à la question 5.*b*).

13. Pour tout entier naturel n et tout réel x, on pose $U_n(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\cos^n(xt)\mathrm{d}t$ et $V_n(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\sin^n(xt)\mathrm{d}t$.

    a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminer $U_2(x)$ et $V_2(x)$ à l'aide de $U(2x)$.

    b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n(x)$.