1) Faisons le changement de variable $\boxed{t = a + \theta(b-a)}$ dans l'intégrale $\displaystyle\int_a^b (b-t)^k f^{(k+1)}(t)dt$. On a $\boxed{dt = (b-a)d\theta}$, et donc :

$$\int_a^b (b-t)^k f^{(k+1)}(t)dt = \int_0^1 (b-a-\theta(b-a))^k f^{(k+1)}(a+\theta(b-a))d\theta$$
$$= (b-a)^k \int_0^1 (1-\theta)^k f^{(k+1)}(a+\theta(b-a))d\theta.$$

Pour obtenir l'égalité voulue, il suffit alors d'utiliser la formule de Taylor avec reste intégral, et de transformer l'intégrale de la formule avec le changement de variable ci-dessus.

2) Soient $\alpha > 0$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors, par croissances comparées :

$$\lim_{|x|\to+\infty} x^{2+n} e^{-\alpha x^2} = 0.$$

L'application $g_{n,\alpha}$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc intégrable sur tout segment inclus dans $\mathbb{R}$, et au voisinage de $\pm\infty$ on a $g_{n,\alpha}(x) = \underset{x\to\pm\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)$ d'après le calcul de limite ci-dessus. Or $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est intégrable au voisinage de $\pm\infty$, donc par comparaison $g_{n,\alpha}$ l'est également. Ainsi $\boxed{g_{n,\alpha} \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}}$.

3) Tout d'abord, notons que $t \mapsto \arcsin(e^{-t})$ est une bijection strictement décroissante de $]0,+\infty[$ dans $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, en tant que composition de la bijection strictement décroissante $t \mapsto e^{-t}$ de $]0,+\infty[$ dans $]0,1[$, et de la bijection strictement croissante $t \mapsto \arcsin(t)$ de $]0,1[$ dans $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$. Donc, d'après la formule du changement de variable, appliquée à $\theta = \arcsin(e^{-t})$ (donc : $d\theta = \dfrac{-e^{-t}}{\sqrt{1-e^{-2t}}}dt$), les intégrales :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-3t}}{\sqrt{1-e^{-2t}}}dt = -\int_0^{+\infty} \left(e^{-t}\right)^2 \frac{-e^{-t}}{\sqrt{1-e^{-2t}}}dt, \quad \text{et} \quad -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 (\sin(\theta))^2\, d\theta$$

sont de même nature, et en cas de convergence elles sont égales. Il est évident que la deuxième intégrale converge : en effet $\theta \mapsto (\sin(\theta))^2$ est continue sur le *segment* $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, donc intégrable sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, puis sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$. On en déduit la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-3t}}{\sqrt{1-e^{-2t}}}dt$, et :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-3t}}{\sqrt{1-e^{-2t}}}dt = -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 (\sin(\theta))^2\, d\theta,$$

et il reste à calculer cette dernière intégrale. On a :

$$-\int_{\frac{\pi}{2}}^0 (\sin(\theta))^2\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1-\cos(2\theta)}{2}\right) d\theta = \left[\frac{\theta}{2} - \frac{\sin(2\theta)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

Donc : $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-3t}}{\sqrt{1-e^{-2t}}}dt = \frac{\pi}{4}}$.

4) Soit $(m,n) \in \mathbb{N}^2$. Notons $f_{m,n}$ l'application $x \mapsto \dfrac{(1+|x|^m)(1+|x|^n)}{1+|x|^{m+n}}$ définie sur $\mathbb{R}$.

L'application $f_{m,n}$ a des limites finies en $\pm\infty$. En effet, au voisinage de $\pm\infty$ on a :

$$\frac{(1+|x|^m)(1+|x|^n)}{1+|x|^{m+n}} \underset{x\to+\pm\infty}{\sim} \frac{|x|^m|x|^n}{|x|^{m+n}} \underset{x\to+\pm\infty}{\longrightarrow} 1,$$

donc, par définition de la limite, il existe $A < 0$ et $B > 0$ tels que $|f_{m,n}(x) - 1| \leqslant 1$ pour tout $x \leqslant A$ ou pour tout $x \geqslant B$. En particulier, pour tout $x \leqslant A$ ou tout $x \geqslant B$, on a : $|f_{m,n}(x)| \leqslant 2$ d'après l'inégalité triangulaire renversée.

De plus, $f_{m,n}$ est continue sur le *segment* $[A, B]$, donc est bornée sur $[A, B]$ par une constante qu'on note M_0. Si on pose $M_{m,n} = \max(M_0, 2)$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $|f_{m,n}(x)| \leqslant M_{m,n}$, démontrant que $f_{m,n}$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

On en déduit que pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^2$, il existe $M_{m,n} > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on ait :

$$(1 + |x|^m)(1 + |x|^n) \leqslant M_{m,n}(1 + |x|^{m+n}). \tag{1}$$

Montrons que $\mathcal{C}_\ell(\mathbb{R})$ est $\boxed{\text{stable par produit interne}}$: en reprenant les notations ci-dessus associées à deux fonctions f et g à croissance lente, alors fg est continue sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |f(x)g(x)| \overset{(2)}{\leqslant} A_f A_g \left(1 + |x|^{m_f}\right)\left(1 + |x|^{m_g}\right) \overset{(1)}{\leqslant} A_f A_g M_{m_f,m_g} \left(1 + |x|^{m_f+m_g}\right),$$

donc fg est à croissance lente (elle vérifie la définition avec $A = A_f A_g M_{m_f,m_g}$ et $m = m_f + m_g$).

Montrons maintenant que $\mathcal{C}_\ell(\mathbb{R})$ est un $\boxed{\text{sous-espace vectoriel réel de } \mathrm{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})}$.

L'inclusion $\mathcal{C}_l(\mathbb{R}) \subseteq \mathrm{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est une conséquence directe de la définition de $\mathcal{C}_l(\mathbb{R})$, et de plus $\mathcal{C}_l(\mathbb{R}) \neq \emptyset$ puisque la fonction identiquement nulle est clairement une fonction à croissance lente (elle vérifie la définition avec n'importe quel choix de constante $A > 0$). Enfin, si f et g sont deux fonctions à croissance lente et si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors il existe $(A_f, m_f) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{N}$ et $(A_g, m_g) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{N}$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on ait :

$$|f(x)| \leqslant A_f \left(1 + |x|^{m_f}\right), \quad |g(x)| \leqslant A_g \left(1 + |x|^{m_g}\right). \tag{2}$$

Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$|f(x) + \lambda g(x)| \leqslant |f(x)| + |\lambda||g(x)| \leqslant A_f \left(1 + |x|^{m_f}\right) + |\lambda| A_g \left(1 + |x|^{m_g}\right).$$

Posons $m = \max(m_f, m_g)$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| \geqslant 1$, on a $|x|^{m_f} \leqslant |x|^m$ et $|x|^{m_g} \leqslant |x|^m$, donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| \geqslant 1$, on a :

$$|f(x) + \lambda g(x)| \leqslant A_f \left(1 + |x|^m\right) + |\lambda| A_g \left(1 + |x|^m\right) = \left(A_f + |\lambda| A_g\right)\left(1 + |x|^m\right).$$

De plus, l'application $x \mapsto \dfrac{f(x) + \lambda g(x)}{1 + |x|^m}$ étant continue sur le *segment* $[-1, 1]$ en tant que quotient d'applications continues dont le dénominateur ne s'annule pas, elle est bornée par une constante $A_0 > 0$. En posant $A = \max\left(A_0, A_f + |\lambda| A_g\right)$, on a finalement :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |f(x) + \lambda g(x)| \leqslant A\left(1 + |x|^m\right),$$

donc $f + \lambda g$ est aussi à croissance lente en plus d'être continue. Ceci achève de démontrer que $\mathcal{C}_l(\mathbb{R})$ est stable par combinaison linéaire, donc est un espace vectoriel.

On déduit rapidement de ce qui précède que $\boxed{\text{les applications polynomiales sont à croissance lente}}$: en effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'application $x \mapsto x^n$ est continue et à croissance lente (prendre $A = 1$ et $m = n$ dans la définition donnée), et toute application polynomiale s'écrit comme combinaison linéaire de monômes $x \mapsto x^n$; comme $\mathcal{C}_l(\mathbb{R})$ est stable par combinaison linéaire, on a le résultat.

5) Soit $f \in \mathcal{C}_l(\mathbb{R})$, et soit $(A, m) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |f(x)| \leqslant A\left(1 + |x|^m\right). \tag{3}$$

Fixons $x \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}$. L'application $y \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f\left(e^{-t}x + \beta_t y\right) e^{-\frac{y^2}{2}}$ est $\boxed{\text{continue sur } \mathbb{R}}$ (on multiplie et compose des applications continues, puisque l'exponentielle l'est et f aussi par hypothèse), donc intégrable sur tout segment inclus dans $\mathbb{R}$, et pour tout $y \in \mathbb{R}$ on a :

$$\left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}} f\left(e^{-t}x + \beta_t y\right) e^{-\frac{y^2}{2}}\right| \leqslant \frac{A}{\sqrt{2\pi}}\left(1 + \left|e^{-t}x + \beta_t y\right|^m\right) e^{-\frac{y^2}{2}} \underset{y \to \pm\infty}{\sim} \beta_t |y|^m e^{-\frac{y^2}{2}} = \beta_t g_{m,\frac{1}{2}}(y),$$

or nous avons démontré dans la question 2 que $g_{m,\frac{1}{2}}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ (et en particulier au voisinage de $\pm\infty$). Par comparaison, l'application $y \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f\left(e^{-t}x + \beta_t y\right) e^{-\frac{y^2}{2}}$ est également intégrable au voisinage de $\pm\infty$, et donc $\boxed{\text{intégrable sur } \mathbb{R}}$.

6) Soient $f \in \mathcal{C}_l(\mathbb{R})$ et $x \in \mathbb{R}$. Pour démontrer la continuité de h_x, nous allons utiliser le théorème de continuité sous le signe intégrale. Vérifions ses hypothèses :

— pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, l'application $y \mapsto f\left(e^{-t}x + \beta_t y\right) e^{-\frac{y^2}{2}}$ est continue (par morceaux) sur $\mathbb{R}$ et pour tout $y \in \mathbb{R}$, l'application $t \mapsto f\left(e^{-t}x + \beta_t y\right) e^{-\frac{y^2}{2}}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$;

— en reprenant les notations de (3), pour tout $(t, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ on a :

$$\begin{aligned}\left|f\left(e^{-t}x + \beta_t y\right) e^{-\frac{y^2}{2}}\right| &\leqslant A\left(1 + \left|e^{-t}x + \beta_t y\right|^m\right) e^{-\frac{y^2}{2}} \\ &\leqslant A\left(1 + \left(\left|e^{-t}\right| \cdot |x| + |\beta_t| \cdot |y|\right)^m\right) e^{-\frac{y^2}{2}} \\ &\leqslant A\left(1 + (|x| + |y|)^m\right) e^{-\frac{y^2}{2}} \quad \text{(HYPOTHÈSE DE DOMINATION)},\end{aligned}$$

et l'application $y \mapsto A\left(1 + (|x| + |y|)^m\right) e^{-\frac{y^2}{2}}$ est continue (par morceaux) et intégrable sur $\mathbb{R}$, par un argument semblable à celui de la question précédente.

Les hypothèses du théorème de continuité sous le signe intégrale sont donc vérifiées, et l'intégrale à paramètre $\boxed{h_x : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(e^{-t}x + \beta_t y\right) e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy \text{ est continue sur } \mathbb{R}_+}$.

Calculons $\lim_{t \to +\infty} P_t f(x) = \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(e^{-t}x + \beta_t y\right) e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy$ à l'aide du théorème de limite d'une intégrale à paramètre par convergence dominée. À cet effet, posons :

$$\forall t > 0,\ \forall y \in \mathbb{R}, \quad f_t(y) = f\left(e^{-t}x + \beta_t y\right) e^{-\frac{y^2}{2}}.$$

L'application f étant continue sur $\mathbb{R}$, on a :

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad \lim_{t \to +\infty} f_t(y) = \lim_{t \to +\infty} f\left(e^{-t}x + \beta_t y\right) e^{-\frac{y^2}{2}} = f(y)e^{-\frac{y^2}{2}}.$$

Pour tout $t > 0$, f_t, est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel y, $f_t(y)$ tend vers $f(y)e^{-\frac{y^2}{2}} = f_\infty(y)$ quand $t \to \infty$, f_t est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tous $t > 0$ et $y \in \mathbb{R}$ on a, en reprenant les calculs ci-dessus :

$$\left|f\left(e^{-t}x + \beta_t y\right) e^{-\frac{y^2}{2}}\right| \leqslant A\left(1 + (|x| + |y|)^m\right) e^{-\frac{y^2}{2}} \quad \text{(HYPOTHÈSE DE DOMINATION)},$$

dont nous avions assuré la continuité et l'intégrabilité sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème de limite d'intégrale à paramètre par convergence dominée, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy$ converge, et on a :

$$\boxed{\lim_{t \to +\infty} P_t f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy}.$$

7) Soient $f \in \mathcal{C}_l(\mathbb{R})$, $(x, h) \in \mathbb{R}^2$ et $t > 0$. Alors :

$$P_t f(x + h) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(e^{-t}x + e^{-t}h + \beta_t y\right) e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy.$$

Faisons le changement de variable affine $\boxed{u = y + \frac{e^{-t}h}{\beta_t},\ du = dy}$. On obtient :

$$P_t f(x + h) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(e^{-t}x + \beta_t u\right) e^{-\frac{\left(u - \frac{e^{-t}h}{\beta_t}\right)^2}{2}}\, du,$$

d'où le résultat.

8) L'application ψ_y est de classe C^1 sur $\left[-\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}\right]$ en tant que composition de l'exponentielle et d'une application polynomiale, et pour tout $h \in \left[-\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}\right]$ on a :

$$|\psi_y'(h)| = \left|\alpha(y-\alpha h)e^{-\frac{1}{2}(y-\alpha h)^2}\right| \leqslant \alpha\left(|y| + |\alpha h|\right)e^{-\frac{1}{2}(y-\alpha h)^2}.$$

Pour $h \in \left[-\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}\right]$ on a $|\alpha h| \leqslant 1$, donc :

$$\boxed{|\psi_y'(h)| \leqslant \alpha(|y|+1)e^{-\frac{1}{2}(y-\alpha h)^2}},$$

et il reste à majorer le terme exponentiel. On a $|y-\alpha h| \geqslant ||y| - |\alpha h||$ d'après l'inégalité triangulaire renversée ; or, $\boxed{\text{si } |y| > 1, \text{ alors } |y| - |\alpha h| \geqslant |y| - 1 > 0}$ et donc $||y| - |\alpha h|| = |y| - |\alpha h|$, puis : $|y - \alpha h| \geqslant |y| - 1 > 0$. On en déduit, l'élévation au carré étant une application croissante sur $\mathbb{R}_+$:

$$(y-\alpha h)^2 = |y-\alpha h|^2 \geqslant (|y|-1)^2.$$

Alors, l'application $t \mapsto e^{-t}$ étant décroissante sur $\mathbb{R}$, on a : $|\psi_y'(h)| \leqslant \alpha(|y|+1)e^{-\frac{1}{2}(|y|-1)^2}$ si $|y| > 1$. Si $|y| \leqslant 1$, on se contente de la majoration triviale $e^{-\frac{1}{2}(y-\alpha h)^2} \leqslant 1$, valable parce que $\frac{1}{2}(y-\alpha h)^2 \geqslant 0$. En résumé,

$$|\psi_y'(h)| \leqslant \begin{cases} \alpha(|y|+1) & \text{si } |y| \leqslant 1, \\ \alpha(|y|+1)e^{-\frac{1}{2}(|y|-1)^2} & \text{si } |y| > 1. \end{cases}$$

9) Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $h \in \mathbb{R}^*$, on a d'après la question 7 :

$$\frac{P_t f(x+h) - P_t f(x)}{h} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(e^{-t}x + \beta_t y\right) \frac{e^{-\frac{\left(y - \frac{e^{-t}}{\beta_t}h\right)^2}{2}} - e^{-\frac{y^2}{2}}}{h} dy.$$

Nous allons calculer la limite de l'intégrande quand $h \to 0$, puis utiliser le théorème de convergence dominée pour en déduire la limite du taux d'accroissement quand $h \to 0$. Tout d'abord, l'application $y \mapsto e^{-\frac{y^2}{2}}$ étant dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $y \mapsto -ye^{-\frac{y^2}{2}}$, on a :

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^{-\frac{\left(y - \frac{e^{-t}}{\beta_t}h\right)^2}{2}} - e^{-\frac{y^2}{2}}}{h} = \lim_{h'\to 0} \frac{e^{-\frac{(y+h')^2}{2}} - e^{-\frac{y^2}{2}}}{-\frac{\beta_t}{e^{-t}}h'} = \frac{e^{-t}}{\beta_t} y e^{-\frac{y^2}{2}}.$$

Donc :

$$\lim_{h\to 0} f\left(e^{-t}x + \beta_t y\right) \frac{e^{-\frac{\left(y - \frac{e^{-t}}{\beta_t}h\right)^2}{2}} - e^{-\frac{y^2}{2}}}{h} = \frac{e^{-t}}{\beta_t} f\left(e^{-t}x + \beta_t y\right) y e^{-\frac{y^2}{2}}.$$

Pour tout $h > 0$ et tout $y \in \mathbb{R}$, posons :

$$f_h(y) = f\left(e^{-t}x + \beta_t y\right) \frac{e^{-\frac{\left(y - \frac{e^{-t}}{\beta_t}h\right)^2}{2}} - e^{-\frac{y^2}{2}}}{h}.$$

Il est clair que pour tout réel h, l'application f_h est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, et le calcul de limite qui précède montre que pour tout réel y, $f_h(y)$ tend quand $h \to 0$ par valeurs non nulles vers

$$g(y) = \frac{e^{-t}}{\beta_t} f\left(e^{-t}x + \beta_t y\right) y e^{-\frac{y^2}{2}},$$

g est également continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $|h|$ non nulle suffisamment petite (de sorte que $h \in \left[-\frac{\beta_t}{e^{-t}}, \frac{\beta_t}{e^{-t}}\right]$) et tout $y \in \mathbb{R}$, on a d'après l'inégalité des accroissements finis et la question 8 (appliquée à $\alpha = \frac{e^{-t}}{\beta_t}$) :

$$\begin{aligned} |f_h(y)| &\leqslant \left|f\left(e^{-t}x + \beta_t y\right)\right| \sup_{k \in \left[-\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}\right]} |\psi_y'(k)| \\ &\leqslant \begin{cases} \frac{e^{-t}}{\beta_t} \left|f\left(e^{-t}x + \beta_t y\right)\right| (|y|+1) & \text{si } |y| \leqslant 1, \\ \frac{e^{-t}}{\beta_t} \left|f\left(e^{-t}x + \beta_t y\right)\right| (|y|+1)e^{-\frac{1}{2}(|y|-1)^2} & \text{si } |y| > 1, \end{cases} \qquad \text{(HYPOTHÈSE DE DOMINATION)} \end{aligned}$$

et l'application :

$$y \mapsto \begin{cases} \dfrac{e^{-t}}{\beta_t} \left| f\left(e^{-t}x + \beta_t y\right)\right| (|y|+1) & \text{si } |y| \leqslant 1, \\ \dfrac{e^{-t}}{\beta_t} \left| f\left(e^{-t}x + \beta_t y\right)\right| (|y|+1)e^{-\frac{1}{2}(|y|-1)^2} & \text{si } |y| > 1, \end{cases}$$

est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, donc intégrable sur tout segment inclus dans $\mathbb{R}$, et intégrable au voisinage de $\pm\infty$ par le même raisonnement que dans la question 5 (essentiellement en remplaçant $g_{m,\frac{1}{2}}$ par $g_{m+1,\frac{1}{2}}$).
On en déduit, d'après le théorème de limite d'une intégrale à paramètre par convergence dominée :

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \frac{P_t f(x+h) - P_t f(x)}{h} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{h\to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(e^{-t}x + \beta_t y\right) \frac{e^{-\frac{\left(y - \frac{e^{-t}}{\beta_t}h\right)^2}{2}} - e^{-\frac{y^2}{2}}}{h} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\beta_t} f\left(e^{-t}x + \beta_t y\right) y e^{-\frac{y^2}{2}} dy. \end{aligned}$$

On en déduit que $\boxed{P_t f \text{ est dérivable en } x, \text{ et } (P_t f)'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\beta_t} f\left(e^{-t}x + \beta_t y\right) y e^{-\frac{y^2}{2}} dy}$. Ceci vaut pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc $P_t f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour montrer que $P_t f$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, on remarque que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} (P_t f)'(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\beta_t^2} f\left(e^{-t}x + \beta_t y\right) \beta_t y e^{-\frac{y^2}{2}} dy \\ &= \frac{e^{-t}}{\beta_t^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(e^{-t}x + \beta_t y\right) (\beta_t y + e^{-t}x - e^{-t}x) e^{-\frac{y^2}{2}} dy \\ &= \frac{e^{-t}}{\beta_t^2} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g\left(e^{-t}x + \beta_t y\right) e^{-\frac{y^2}{2}} dy - e^{-t}x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(e^{-t}x + \beta_t y\right) e^{-\frac{y^2}{2}} dy \right), \end{aligned}$$

où l'on a posé : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = x \cdot f(x)$. Ainsi :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad (P_t f)'(x) = \frac{e^{-t}}{\beta_t^2} \left(P_t g(x) - e^{-t} x P_t f(x)\right)}.$$

On vient de démontrer que $P_t f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc continue sur $\mathbb{R}$. De plus, comme g est continue, et est le produit d'une application polynomiale et d'une fonction à croissance lente, elle est à croissance lente d'après la question 4. En appliquant tout ce qui précède à la fonction g, on en déduit que $P_t g$ est dérivable, donc continue sur $\mathbb{R}$. Ainsi $(P_t f)'$ s'écrit comme différence de produits d'applications continues sur $\mathbb{R}$, donc est continue sur $\mathbb{R}$: ceci achève de démontrer que $\boxed{P_t f \text{ est de classe } \mathrm{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}}$.

10) Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} |a+b|^m &= |(a+b)^m| \\ &= |\sum_{k=0}^{\infty} \binom{m}{k} a^k b^{m-k}| \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \binom{m}{k} |a|^k |b|^{m-k} \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \binom{m}{k} (\max(|a|, |b|)^m \\ &= 2^m \max(|a|^m, |b|^m) \\ &\leqslant \boxed{2^m(|a|^m + |b|^m)} \end{aligned}$$

Montrons à présent que P_t laisse stable $\mathcal{C}_l(\mathbb{R})$: soit $f \in \mathcal{C}_l(\mathbb{R})$, et reprenons les notations de (3). Alors $P_t f$ est continue sur $\mathbb{R}$ d'après la question 9, et :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}, \quad |P_t f(x)| &\leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(e^{-t}x + \beta_t y)| e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy \\
&\overset{(3)}{\leqslant} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(1 + |e^{-t}x + \beta_t y|^m\right) e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy \\
&\leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(1 + 2^m |e^{-t}x|^m + 2^m |\beta_t y|^m\right) e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy \\
&\leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + 2^m |y|^m)\, e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy + \frac{2^m |x|^m}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy.
\end{aligned}$$

Si on pose $A' = \max\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + 2^m |y|^m)\, e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy, \frac{2^m}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy \right)$, alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |P_t f(x)| \leqslant A' + A'|x|^m \leqslant A'(1 + |x|^m),$$

démontrant que $P_t f$ est à croissance lente. Donc $\boxed{P_t f \in \mathcal{C}_l(\mathbb{R})}$: d'où le résultat.

11) Pour démontrer que h_x est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, nous allons utiliser le théorème de dérivation sous le signe intégrale. Vérifions ses hypothèses ; pour tout $(t, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, on pose :

$$g(t, y) = f\left(e^{-t}x + \beta_t y\right) e^{-\frac{y^2}{2}}.$$

Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $a \leqslant b$. Alors :
— pour tout $t \in [a, b]$, l'application $y \mapsto g(t, y)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$;
— pour tout $y \in \mathbb{R}$, l'application $t \mapsto g(t, y)$ est de classe C^1 sur $[a, b]$ puisque, par hypothèse, f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et $t \mapsto e^{-t}x + \beta_t y$ est de classe C^1 sur $[a, b]$ (on rappelle que $\beta_t = \sqrt{1 - e^{-2t}}$) ; on a :

$$\forall t \in [a, b],\ \forall y \in \mathbb{R}, \quad \frac{\partial g}{\partial t}(t, y) = \left(-e^{-t}x + \frac{e^{-2t}}{\beta_t} y \right) f'\left(e^{-t}x + \beta_t y\right) e^{-\frac{y^2}{2}},$$

et pour tout $t \in [a, b]$, l'application $y \mapsto \frac{\partial g}{\partial y}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$;
— puisque $f \in \mathcal{C}_l^2(\mathbb{R})$, il existe $(A, m) \in \mathbb{R}_+^* \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$ on ait :

$$|f'(t)| \leqslant A\,(1 + |t|^m),$$

et donc, pour tout $(t, y) \in [a, b] \times \mathbb{R}$ on a :

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\partial g}{\partial t}(t_0, y) \right| &\leqslant A \left| -e^{-t}x + \frac{e^{-2t}}{\beta_t} y \right| \cdot \left(1 + \left|e^{-t}x + \beta_t y\right|^m\right) e^{-\frac{y^2}{2}} \\
&\leqslant A \left(|x| + \frac{e^{-2t}}{\sqrt{1 - e^{-2t}}} |y| \right) (1 + (|x| + |y|)^m)\, e^{-\frac{y^2}{2}} \\
&\leqslant A \left(|x| + \frac{|y|}{\sqrt{1 - e^{-2a}}} \right) (1 + (|x| + |y|)^m)\, e^{-\frac{y^2}{2}} \quad \text{(HYPOTHÈSE DE DOMINATION)}
\end{aligned}$$

et, imitant la justification des réponses aux questions analogues 5 et 6, l'application ci-dessus est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$ (elle est de l'ordre de grandeur de $g_{m+1, \frac{1}{2}}(y)$ au voisinage de $\pm\infty$).

Les hypothèses du théorème de dérivation sous le signe intégrale sont donc vérifiées sur tout segment $[a, b]$ inclus dans $\mathbb{R}_+^*$, et l'intégrale à paramètre $h_x : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(e^{-t}x + \beta_t y\right) e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy$ est de classe C^1 sur tout segment $[a,b]$ inclus dans $\mathbb{R}_+^*$, donc sur $\mathbb{R}_+^*$. On a en outre :

$$\begin{aligned}
\forall t_0 \in \mathbb{R}_+^*, \quad h_x'(t_0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial g}{\partial t}(t_0,y)dy \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(-e^{-t_0}x + \frac{e^{-2t_0}}{\beta_{t_0}}y\right) f'\left(e^{-t_0}x + \beta_{t_0}y\right) e^{-\frac{y^2}{2}} dy \\
&= -e^{-t_0}x \int_{-\infty}^{+\infty} f'\left(e^{-t_0}x + \beta_{t_0}y\right) e^{-\frac{y^2}{2}} dy + \frac{e^{-2t_0}}{\beta_{t_0}} \int_{-\infty}^{+\infty} f'\left(e^{-t_0}x + \beta_{t_0}y\right) ye^{-\frac{y^2}{2}} dy \\
&= \boxed{-e^{-t_0}x(P_{t_0}f')(x) + \frac{e^{-2t_0}}{\beta_{t_0}} \int_{-\infty}^{+\infty} f'\left(e^{-t_0}x + \beta_{t_0}y\right) ye^{-\frac{y^2}{2}} dy},
\end{aligned}$$

12) Soient $t_0 > 0$ et $g \in \mathcal{C}_l(\mathbb{R})$. Alors l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(\beta_{t_0}y)ye^{-\frac{y^2}{2}} dy$ converge d'après la question 5 où l'on choisit $x = 0$ (en effet $y \mapsto g(y)y$ est à croissance lente d'après la stabilité par produit). $\boxed{\text{Intégrons par parties}}$, en dérivant $y \mapsto g(\beta_{t_0}y)$, et $\boxed{\text{en primitivant } y \mapsto ye^{-\frac{y^2}{2}}}$. Le terme $\left[-g(\beta_{t_0}y)e^{-\frac{y^2}{2}}\right]_{-\infty}^{+\infty}$ est bien défini : en effet, puisque $g \in \mathcal{C}_l(\mathbb{R})$, il existe $(A,m) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |g(x)| \leqslant A(1 + |x|^m),$$

et donc, au voisinage de $\pm\infty$:

$$\left|-g(\beta_{t_0}y)e^{-\frac{y^2}{2}}\right| \leqslant A(1 + |\beta_{t_0}y|^m)e^{-\frac{y^2}{2}} \leqslant A\left(g_{0,\frac{1}{2}}(y) + |\beta_{t_0}|^m g_{m,\frac{1}{2}}(y)\right) \underset{y\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0$$

d'après la question 2. On a donc : $\left[-g(\beta_{t_0}y)e^{-\frac{y^2}{2}}\right]_{-\infty}^{+\infty} = 0 - 0 = 0$. On en déduit :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(\beta_{t_0}y)ye^{-\frac{y^2}{2}} dy = \left[-g(\beta_{t_0}y)e^{-\frac{y^2}{2}}\right]_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} \beta_{t_0}g'(\beta_{t_0}y)e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \beta_{t_0} \int_{-\infty}^{+\infty} g'(\beta_{t_0}y)e^{-\frac{y^2}{2}} dy,$$

d'où le résultat en divisant par $\sqrt{2\pi}$.

13) Déterminons la limite, quand $t_0 \to 0$, de :

$$h_x'(t_0) = -e^{-t_0}x(P_{t_0}f')(x) + \frac{e^{-2t_0}}{\beta_{t_0}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f'\left(e^{-t_0}x + \beta_{t_0}y\right) ye^{-\frac{y^2}{2}} dy.$$

Nous avons démontré, dans la question 6, que pour toute application f à croissance lente, l'application $h_x : t \mapsto P_t f$ est continue sur $\mathbb{R}_+$. Or f' est aussi à croissance lente par hypothèse, donc $t \mapsto P_t f'$ est continue. Cela implique :

$$\lim_{t_0\to 0} -e^{t_0}x(P_{t_0}f')(x) = -x(P_0 f')(x) = -xf'(x).$$

De plus, d'après la question précédente appliquée à $g : y \mapsto f'\left(e^{-t_0}x + y\right)$, on a :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f'\left(e^{-t_0}x + \beta_{t_0}y\right) ye^{-\frac{y^2}{2}} dy = \frac{\beta_{t_0}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f''(e^{-t_0}x + \beta_{t_0}y)e^{-\frac{y^2}{2}} dy,$$

donc :

$$\frac{e^{-2t_0}}{\beta_{t_0}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f'\left(e^{-t_0}x + \beta_{t_0}y\right) e^{-\frac{y^2}{2}} dy = e^{-2t_0}(P_{t_0}f'')(x) \underset{t_0\to 0}{\longrightarrow} (P_0 f'')(x) = f''(x),$$

par continuité de $t \mapsto P_t f''$, l'application f'' étant également à croissance lente par hypothèse. On en déduit :

$$\lim_{t_0\to 0} h_x'(t_0) = f''(x) - xf'(x).$$

Ainsi h_x est continue sur $\mathbb{R}_+$, de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, et sa dérivée admet une limite finie en 0. D'après le théorème de "prolongement" (ou plus pertinemment de "limite") de la dérivée, $\boxed{h_x \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}_+}$, et on a :

$$\boxed{h_x'(0) = f''(x) - xf'(x)}.$$

14) Soient $k \in [\![1,2]\!]$ et $\omega \in \Omega$. Il y a deux possibilités : soit $|X_1(\omega)| \leqslant 1$, auquel cas $|X_1(\omega)|^k \leqslant 1$ également ; soit $|X_1(\omega)| \geqslant 1$, auquel cas $|X_1(\omega)|^k \leqslant |X_1(\omega)|^3$ parce que l'application $x \mapsto t^x$ est croissante sur $\mathbb{R}$ dès que $t \geqslant 1$. Dans tous les cas, on a :

$$0 \leqslant |X_1|^k \leqslant \max(1, |X_1|^3) \leqslant 1 + |X_1|^3.$$

Par croissance et additivité de l'espérance pour des variables aléatoires positives, on a dans $[0, \infty]$:

$$E(|X_1|^k) \leqslant E(1 + |X_1|^3) = E(1) + E(|X_1|^3) = 1 + E(|X_1|^3) < \infty$$

donc $\boxed{X_1^k \text{ est d'espérance finie}}$.

15) La question est une application directe du lemme des coalitions : $X_1 = id_{\mathbb{R}} \circ X_1$ et $(X_2, \dots, X_n) = id_{\mathbb{R}^{n-1}} \circ (X_2, \dots, X_n)$ sont indépendantes. Respectons néanmoins le texte.
Des variables aléatoires discrètes $X_1, \dots, X_n$ définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ sont mutuellement indépendantes si pour toute partie (automatiquement finie) I de $[\![1,n]\!]$ et toute famille $(x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} X_i(\Omega)$,

$$P(\cap_{i \in I}(X_i = x_i)) = \prod_{i \in I} P(X_i = x_i)$$

Si $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes, pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega)$ on a donc :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_1 = x_1, (X_2, \dots, X_n) = (x_2, \dots, x_n)) &= \mathbb{P}(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) \\
&= \mathbb{P}(X_1 = x_1)\mathbb{P}(X_2 = x_2) \cdots \mathbb{P}(X_n = x_n) \\
&= \mathbb{P}(X_1 = x_1)\mathbb{P}(X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n) \\
&= \mathbb{P}(X_1 = x_1)\mathbb{P}((X_2, \dots, X_n) = (x_2, \dots, x_n)),
\end{aligned}$$

donc $\boxed{X_1 \text{ et } (X_2, \dots, X_n) \text{ sont indépendantes}}$.

16) Soient $m \in [\![1,3]\!]$, $i \in [\![1,n]\!]$ et g une fonction bornée.
Alors $\boxed{X_i^m \text{ et } g \circ S^{(i)} \text{ sont indépendantes}}$ par le lemme des coalitions et car
$g \circ S^{(i)} = h \circ (X_1, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_n)$
où $h : (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \mapsto g((x_1 + \ldots + x_{i-1} + x_{i+1} + \ldots + x_n)/\sqrt{n})$
De plus $\boxed{X_i^m \text{ est d'espérance finie}}$ par la question 14), et $\boxed{g \circ S^{(i)} \text{ l'est}}$ car elle est bornée.
Un théorème du cours permet de conclure que $X_i^m g \circ S^{(i)}$ est d'espérance finie et que

$$\boxed{E(X_i^m g(S^{(i)})) = E(X_i^m)E(g(S^{(i)}))}.$$

17) Partons du membre de droite de l'égalité à démontrer. Comme $g \in \mathcal{C}_b^3$, les applications g' et g'' sont aussi bornées, et la question précédente implique en particulier :

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \quad E(X_i g'(S^{(i)})) = E(X_i)E(g'(S^{(i)})) = E(X_1)E(g'(S^{(i)})) = 0,$$

puisque $E(X_1) = 0$ par hypothèse, et par un calcul semblable utilisant l'égalité $E(X_1^2) = 1$, on a : $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $E(X_i^2 g''(S^{(i)})) = E(g''(S^{(i)}))$. Alors, l'espérance étant linéaire :

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n E\left(X_i \left(g'(S) - g'(S^{(i)}) - \frac{X_i}{\sqrt{n}} g''(S^{(i)})\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n E(X_i g'(S)) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(g''(S^{(i)})).$$

Puis, toujours grâce à la linéarité de l'espérance :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E\left(g''(S)-g''(S^{(i)})\right)-\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} E\left(X_i\left(g'(S)-g'(S^{(i)})-\frac{X_i}{\sqrt{n}}g''(S^{(i)})\right)\right)\\
&=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(g''(S))-\cancel{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(g''(S^{(i)}))}-\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} E(X_i g'(S))+\cancel{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(g''(S^{(i)}))}\\
&=E(g''(S))-E\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n}}X_i g'(S)\right)\\
&=E(g''(S))-E(Sg'(S))\\
&=\boxed{E(g''(S)-Sg'(S))},
\end{aligned}$$

18) D'après la question précédente, on a :

$$\begin{aligned}
E(Lg(S))&=E(g''(S)-Sg'(S))\\
&=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E\left(g''(S)-g''(S^{(i)})\right)-\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} E\left(X_i\left(g'(S)-g'(S^{(i)})-\frac{X_i}{\sqrt{n}}g''(S^{(i)})\right)\right). \qquad (4)
\end{aligned}$$

Si, pour tout $i\in[\![1,n]\!]$ et tout $\omega\in\Omega$, on applique la formule de Taylor avec reste intégral obtenue dans la question 1, avec $g''\in \mathrm{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $k=0$, entre $S^{(i)}(\omega)$ et $S(\omega)$, on a :

$$g''(S(\omega))=g''(S^{(i)}(\omega))+\left(S(\omega)-S^{(i)}(\omega)\right)\int_0^1 g^{(3)}\left(S^{(i)}(\omega)+\theta\left(S(\omega)-S^{(i)}(\omega)\right)\right)d\theta,$$

or $S-S^{(i)}=\dfrac{1}{\sqrt{n}}X_i$, donc :

$$g''(S)-g''(S^{(i)})=\frac{X_i}{\sqrt{n}}\int_0^1 g^{(3)}\left(S^{(i)}+\frac{\theta}{\sqrt{n}}X_i\right)d\theta.$$

Avec le même raisonnement adapté à $g'\in \mathrm{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ avec $k=1$, on a pour tout $i\in[\![1,n]\!]$:

$$\begin{aligned}
g'(S)-g'(S^{(i)})&=(S-S^{(i)})g''(S^{(i)})+(S-S^{(i)})^2\int_0^1(1-\theta)\,g^{(3)}\left(S^{(i)}+\theta(S-S^{(i)})\right)d\theta\\
&=\frac{X_i}{\sqrt{n}}g''(S^{(i)})+\left(\frac{X_i}{\sqrt{n}}\right)^2\int_0^1(1-\theta)\,g^{(3)}\left(S^{(i)}+\frac{\theta}{\sqrt{n}}X_i\right)d\theta.
\end{aligned}$$

Alors, en utilisant ces deux dernières formules dans la relation (4), on obtient :

$$\begin{aligned}
E(Lg(S))=&\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E\left(\frac{X_i}{\sqrt{n}}\int_0^1 g^{(3)}\left(S^{(i)}+\frac{\theta}{\sqrt{n}}X_i\right)d\theta\right)\\
&-\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} E\left(X_i\left(\frac{X_i^2}{n}\int_0^1(1-\theta)\,g^{(3)}\left(S^{(i)}+\frac{\theta}{\sqrt{n}}X_i\right)d\theta\right)\right),
\end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned}
\boxed{E(Lg(S))}=&\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\sum_{i=1}^{n} E\left(X_i\int_0^1 g^{(3)}\left(S^{(i)}+\frac{\theta}{\sqrt{n}}X_i\right)d\theta\right)\\
&-\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\sum_{i=1}^{n} E\left(X_i^3\int_0^1(1-\theta)\,g^{(3)}\left(S^{(i)}+\frac{\theta}{\sqrt{n}}X_i\right)d\theta\right),
\end{aligned}$$

19) La croissance de l'espérance permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
|E(Lg(S))| &\leqslant \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\sum_{i=1}^{n} E\left(|X_i|\int_0^1 \|g^{(3)}\|_\infty d\theta\right) + \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\sum_{i=1}^{n} E\left(|X_i|^3\int_0^1 (1-\theta)\,\|g^{(3)}\|_\infty d\theta\right)\\
&\leqslant \frac{\|g^{(3)}\|_\infty}{n^{\frac{3}{2}}}\left(\sum_{i=1}^{n} E\left(|X_i|\int_0^1 d\theta\right) + \sum_{i=1}^{n} E\left(|X_i|^3\int_0^1 d\theta\right)\right)\\
&= \frac{\|g^{(3)}\|_\infty}{n^{\frac{3}{2}}}\left(\sum_{i=1}^{n} E\left(|X_i|\right) + \sum_{i=1}^{n} E\left(|X_i|^3\right)\right).
\end{aligned}$$

Les variables aléatoires $X_1,\dots,X_n$ ont même loi de probabilité, donc $|X_1|,\dots,|X_n|$ également, et pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ on a $E(|X_i|) = E(|X_1|)$. On en déduit :

$$\boxed{|E(Lg(S))| \leqslant \frac{\|g^{(3)}\|_\infty}{\sqrt{n}}\left(E\left(|X_1|\right) + E\left(|X_i|^3\right)\right) = \frac{\|g^{(3)}\|_\infty}{\sqrt{n}}E\left(|X_1| + |X_i|^3\right)}.$$

20) Une fonction continue et bornée est clairement à croissance bornée : on le démontre en reprenant le raisonnement de la question 4. Alors, soient $t>0$ et $f \in \mathcal{C}_b^2$; on a également $f \in \mathcal{C}_l^2(\mathbb{R})$, et d'après le lemme qui suit la question 9 l'application $P_t f$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (P_t f)''(x) = \frac{e^{-2t}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f''(e^{-t}x + \beta_t y)e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy = e^{-2t}P_t(f'')(x).$$

Or f'' est continue et à croissance bornée, donc d'après la question 9 l'application $P_t(f'')$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P_t(f'')'(x) = \frac{e^{-t}}{\beta_t}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f''(e^{-t}x + \beta_t y)ye^{-\frac{y^2}{2}}\,dy,$$

donc :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad (P_t f)^{(3)}(x) = \frac{e^{-3t}}{\beta_t}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f''(e^{-t}x + \beta_t y)ye^{-\frac{y^2}{2}}\,dy}.$$

On en déduit la majoration suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \left|(P_t f)^{(3)}(x)\right| \leqslant \frac{e^{-3t}}{\beta_t}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \left|f''(e^{-t}x + \beta_t y)\right|\cdot|y|e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy \leqslant \frac{e^{-3t}}{\beta_t}\frac{\|f''\|_\infty}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} |y|e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy,$$

donc : $\|(P_t f)^{(3)}\|_\infty \leqslant \dfrac{e^{-3t}}{\beta_t}\dfrac{\|f''\|_\infty}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |y|e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy$. Il reste à calculer cette dernière intégrale : son intégrande est une fonction paire, donc :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |y|e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy = 2\int_0^{+\infty} |y|e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy = 2\int_0^{+\infty} ye^{-\frac{y^2}{2}}\,dy = 2\left[-e^{-\frac{y^2}{2}}\right]_0^{+\infty} = 2.$$

Par conséquent :

$$\boxed{\|(P_t f)^{(3)}\|_\infty \leqslant \frac{e^{-3t}}{\beta_t}\frac{\|f''\|_\infty}{\sqrt{2\pi}} \times 2 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{e^{-3t}}{\beta_t}\|f''\|_\infty \leqslant \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{e^{-3t}}{\beta_t}\|f\|_{2,\infty}}.$$

21) D'après le théorème 1, pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_b^2$ on a également $f \in \mathcal{C}_l^2$, et :

$$\forall \omega \in \Omega \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)e^{-\frac{y^2}{2}} - f(S(\omega)) = \int_0^{+\infty} L(P_t f)(S(\omega))dt.$$

Donc, pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_b^2$, par linéarité de l'espérance on a :

$$E(f(S)) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)e^{-\frac{y^2}{2}}\,dx = -E\left(\int_0^{+\infty} L(P_t f)(S)dt\right)$$

Montrons qu'il est possible de permuter l'espérance et l'intégrale dans le membre de droite.
Par le théorème de transfert,

$$E\left(\int_0^{+\infty} L(P_tf)(S)dt\right) = \sum_{s\in\mathbb{R}} P(S=s)\int_0^{\infty} L(P_tf)(s)dt$$

(somme à support au plus dénombrable car S est discrète)
Si $S(\Omega)$ est fini, on conclut par linéarité de l'intégrale. Sinon, $S(\Omega)=\{s_n,\ n\in\mathbb{N}\}$ où (s_n) est une suite de réels deux à deux distincts, et le membre de droite s'écrit :

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(S=s_n)\int_0^{\infty} L(P_tf)(s_n)dt$$

et on pourra intégrer terme à terme et écrire cette somme sous la forme :

$$\int_0^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} P(S=s_n)L(P_tf)(s_n)dt = \int_0^{\infty} E\Big(L(P_tf)\Big)dt$$

en utilisant le théorème de Lebesgue à condition d'établir

(i) la continuité (donc la continiuité par morceaux) sur $]0,\infty[$ des fonctions $t\mapsto L(P_tf)(s_n)$

(ii) la convergence de la série

$$\sum_{n\geqslant 0} P(S=s_n)\int_0^{\infty} |L(P_tf)(s_n)|dt$$

(iii) la continuité (donc la continuité par morceaux) sur $]0,\infty[$ de $t\mapsto \sum_{n=0}^{\infty} P(S=s_n)L(P_tf)(s_n)$

(i) ce point se démontre aisément en utilisant le lemme 1 et le théorème de continuité des intégrales à paramètre par convergence dominée (f' et f'' étant bornées, on domine par $cte.e^{-y^2/2}$.

(ii) Pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $t>0$,

$$(*)\qquad |L(P_tf)(s_n)| \leqslant |(P_tf)''(s_n)| + |s_n|.|(P_tf)'(s_n)| \leqslant \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{e^{-2t}}{\beta_t}||f||_{1,\infty} + \frac{e^{-t}}{\beta t}||f||_{\infty}\right)$$

(en raisonnant comme dans la question précédente)
On vérifie aisément que $t\mapsto \frac{e^{-2t}}{\beta_t}$ et $t\mapsto \frac{e^{-t}}{\beta_t}$ sont intégrables sur $]0,\infty[$, ce qui nous permet de majorer $P(S=s_n)\int_0^{\infty}|L(P_tf)(s_n)|dt$ par :

$$C_1P(S=s_n) + C_2|s_n|P(S=s_n)$$

où C_1 et C_2 sont deux constantes réelles positives (indépendantes de n)
Or $\sum_{n=0}^{\infty} P(S=s_n) = 1 < \infty$ et par transfert positif $\sum_{n=0}^{\infty}|s_n|P(S=s_n) = E(|S|) < \infty$.
Donc $\sum_{n\geqslant 0} P(S=s_n)\int_0^{\infty}|L(P_tf)(s_n)|dt$ converge.

(iii) Pour tout $a>0$, $t\mapsto \frac{e^{-2t}}{\beta_t}$ et $t\mapsto \frac{e^{-t}}{\beta_t}$ sont bornées sur $[a,\infty[$ car elles sont continues et de limite finie (nulle) à l'infini. On en déduit à l'aide de la majoration $(*)$ que la série $\sum_{n\geqslant 0} P(S=s_n)L(P_tf)(s_n)$ converge normalement donc uniformément sur tous les intervalles $[a,\infty[$ $(a>0)$ et donc que sa fonction somme est continue sur $]0,\infty[$.

$\boxed{\text{Nous avons donc justifié l'interversion de l'intégration et du passage à l'espérance}}$

Comme P_tf est bornée pour toute fonction f bornée (vérification facile), on a d'après la question 19 :

$$\left|\int_0^{+\infty} E\left(L(P_tf)(S)\right)dt\right| \leqslant \int_0^{+\infty} |E(L(P_tf)(S))|\,dt \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{\|(P_tf)^{(3)}\|_{\infty}}{\sqrt{n}} E\left(|X_1|+|X_1|^3\right)dt$$

puis, d'après les questions 20 et 3 :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{\|(P_t f)^{(3)}\|_\infty}{\sqrt{n}} E\left(|X_1| + |X_1|^3\right) dt &\leqslant \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\|f\|_{2,\infty}}{\sqrt{n}} E\left(|X_1| + |X_1|^3\right) \int_0^{+\infty} \frac{e^{-2t}}{\beta_t} dt \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\|f\|_{2,\infty}}{\sqrt{n}} E\left(|X_1| + |X_1|^3\right),\end{aligned}$$

donc finalement, en recoupant tous ces calculs, pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_b^2$ on a :

$$\boxed{\left|E(f(S)) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-\frac{y^2}{2}} dx\right| \leqslant \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\|f\|_{2,\infty}}{\sqrt{n}} E\left(|X_1| + |X_1|^3\right)},$$