

Partie I

1. (a) Si f est positive on sait que (i) est équivalent à (ii).
 (b) Si f n'est pas positive (i) implique (ii) mais la réciproque est fautive. L'exemple classique est $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$.
2. (a) On sait que $C^0(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$ étant un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$, il suffit donc de montrer que E est un sous-espace vectoriel de $C^0(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$.

La fonction nulle appartient à E donc $E \neq \emptyset$.

Si $(f, g, \lambda) \in E \times E \times \mathbf{R}$, pour tout $x > 0$, les deux fonctions $t \mapsto f(t)e^{-xt}$ et $t \mapsto g(t)e^{-xt}$ sont intégrables sur \mathbf{R}_+ donc $t \mapsto (f(t) + \lambda g(t))e^{-xt}$ l'est aussi donc $f + \lambda g \in E$.

Finalement, E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$.

- (b) On voit d'abord que $F = C^0(\mathbf{R}_+, \mathbf{R}) \cap \mathcal{B}(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$.

Soit $f \in F$, on a $\forall x > 0, \forall t \in \mathbf{R}_+, |f(t)e^{-xt}| \leq \|f\|_\infty e^{-xt}$ et $t \mapsto e^{-xt}$ intégrable sur \mathbf{R}_+ donc $t \mapsto f(t)e^{-xt}$ l'est aussi donc $f \in E$ et donc $F \subset E$.

Donc F est un sous-espace vectoriel de E .

- (c) Par linéarité de l'intégrale, pour tout $(f, g, \lambda) \in E \times E \times \mathbf{R}$, et tout $x > 0$:

$$\mathcal{L}(f + \lambda g)(x) = \int_0^{+\infty} (f(t) + \lambda g(t))e^{-xt} dt = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt} dt + \lambda \int_0^{+\infty} g(t)e^{-xt} dt = \mathcal{L}(f)(x) + \lambda \mathcal{L}(g)(x)$$

soit $\mathcal{L}(f + \lambda g) = \mathcal{L}(f) + \lambda \mathcal{L}(g)$. Donc $\mathcal{L} \in \mathcal{L}(E, \mathcal{F}(\mathbf{R}_+, \mathbf{R}))$.

3. (a) La fonction \mathcal{U} appartient à F donc $\mathcal{U} \in E$ et $\forall x > 0, \mathcal{L}(\mathcal{U})(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \left[-\frac{e^{-xt}}{x} \right]_0^{+\infty}$ soit $\forall x > 0, \mathcal{L}(\mathcal{U})(x) = \frac{1}{x}$.

- (b) De même, $h_\lambda \in F$ car $\forall t \in \mathbf{R}_+, |h_\lambda(t)| \leq 1$ donc $h_\lambda \in E$.

De plus

$$\forall x > 0, \mathcal{L}(h_\lambda)(x) = \int_0^{+\infty} e^{-(x+\lambda)t} dt = \mathcal{L}(\mathcal{U})(x + \lambda)$$

donc $\forall x > 0, \mathcal{L}(h_\lambda)(x) = \frac{1}{x + \lambda}$.

4. On remarque que $\frac{t^n e^{-xt}}{e^{-\frac{xt}{2}}} = t^n e^{-\frac{xt}{2}} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$ donc $\exists A > 0, \forall t \geq A, \frac{t^n e^{-xt}}{e^{-\frac{xt}{2}}} \leq 1$.

Cela implique $\exists A > 0, \forall t \geq A, t^n e^{-xt} \leq e^{-\frac{xt}{2}}$.

Maintenant, $g_n \in C^0(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$ et $\forall x > 0, g_n(t)e^{-xt} = f(t)t^n e^{-xt} = O_{t \rightarrow +\infty} \left(f(t)e^{-\frac{xt}{2}} \right)$.

De plus $t \mapsto f(t)e^{-\frac{xt}{2}}$ est intégrable sur \mathbf{R}_+ donc $t \mapsto g_n(t)e^{-xt}$ l'est aussi. Ainsi $g_n \in E$.

5. Déjà, f est de classe C^1 sur \mathbf{R}_+ donc $f' \in C^0(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$. Puisque f est croissante, on a $f' \geq 0$ donc $\forall x > 0, \forall t \in \mathbf{R}_+, f'(t)e^{-xt} \geq 0$ et, selon 1.a), il suffit de montrer que $\int_0^y f'(t)e^{-xt} dt$ a une limite finie quand y tend vers $+\infty$ pour avoir $f' \in E$. Or, par intégration par parties,

$$\int_0^y f'(t)e^{-xt} dt = \left[f(t)e^{-xt} \right]_0^y + x \int_0^y f(t)e^{-xt} dt = f(y)e^{-xy} - f(0) + x \int_0^y f(t)e^{-xt} dt.$$

Or $f \in E$ implique, d'après 1.a), $\forall x > 0, \int_0^y f(t)e^{-xt} dt \xrightarrow[y \rightarrow +\infty]{} \mathcal{L}(f)(x)$.

D'autre part, f étant bornée $\forall x > 0, \forall y \geq 0 |f(y)e^{-xy}| \leq \|f\|_\infty e^{-xy} \xrightarrow[y \rightarrow +\infty]{} 0$.

La limite du membre de droite existe donc quand y tend vers $+\infty$ ce qui donne $f' \in E$ et, pour $x > 0, \mathcal{L}(f')(x) = x\mathcal{L}(f)(x) - f(0)$.

6. (a) Soit $a > 0$. Appliquons le théorème de dérivation des intégrales à paramètre sur $[a, +\infty[$, en posant pour $(x, t) \in [a, +\infty[\times \mathbf{R}_+$, $\phi(x, t) = f(t)e^{-xt}$:
- Pour tout $x \in [a, +\infty[$, l'application $t \mapsto f(t)e^{-xt}$ est continue (par morceaux) et intégrable sur \mathbf{R}_+ ,
 - Pour tout $(x, t) \in [a, +\infty[\times \mathbf{R}_+$, $\frac{\partial \phi}{\partial x}(x, t) = -tf(t)e^{-xt} = -g_1(t)e^{-xt}$ existe,
 - Pour tout $t \in \mathbf{R}_+$, $x \mapsto \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, t)$ continue sur $[a, +\infty[$,
 - Pour tout $x \in [a, +\infty[$, l'application $t \mapsto \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, t)$ est continue (par morceaux) sur \mathbf{R}_+ ,
 - $\forall x \in [a, +\infty[$, $\forall t \in \mathbf{R}_+$, $\left| \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, t) \right| \leq t|f(t)|e^{-at} = |g_1(t)|e^{-at}$ et, selon 4), $t \mapsto g_1(t)e^{-at}$ est intégrable car $g_1 \in E$,
- donc $\mathcal{L}(f)$ est C^1 sur $[a, +\infty[$ et

$$\forall x \in [a, +\infty[, \quad (\mathcal{L}(f))'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, t) dt = -\mathcal{L}(g_1)(x)$$

Ceci étant vrai pour tout $a > 0$, $\mathcal{L}(f)$ est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et $(\mathcal{L}(f))' = -\mathcal{L}(g_1)$.

- (b) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbf{N}$ que $\mathcal{L}(f)$ est de classe C^n sur $]0, +\infty[$ et $(\mathcal{L}(f))^{(n)} = (-1)^n \mathcal{L}(g_n)$:
- pour $n = 0$, puisque, selon la question précédente, $\mathcal{L}(f)$ est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$, à fortiori, $\mathcal{L}(f)$ est de classe C^0 sur $]0, +\infty[$ et l'égalité est immédiate car $g_0 = f$;
 - si le résultat est vrai pour n , en appliquant la question précédente à g_n qui appartient à E d'après 4), on obtient que $\mathcal{L}(g_n)$ est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et $(\mathcal{L}(g_n))' = -\mathcal{L}(g_{n+1})$, car pour tout $t \in \mathbf{R}_+$, $g_n(t) = g_{n+1}(t)$.
- On a donc $\mathcal{L}(f)$ est de classe C^{n+1} sur $]0, +\infty[$ et $(\mathcal{L}(f))^{(n+1)} = (-1)^{n+1} \mathcal{L}(g_{n+1})$.
- Ainsi $\mathcal{L}(f)$ est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$ et $\forall n \in \mathbf{N}$, $(\mathcal{L}(f))^{(n)} = (-1)^n \mathcal{L}(g_n)$.

Partie II

7. (a) Soit $f \in F$. On a $\forall x > 0, \forall t \in \mathbf{R}_+, |f(t)e^{-xt}| \leq \|f\|_\infty e^{-xt}$ donc

$$\forall x > 0, |\mathcal{L}(f)(x)| = \left| \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt} dt \right| \leq \int_0^{+\infty} |f(t)|e^{-xt} dt \leq \|f\|_\infty \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{\|f\|_\infty}{x},$$

d'après 3.a). On en déduit que $\mathcal{L}(f)(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

- (b) On retrouve ici les hypothèses de la question 5) : f de classe \mathcal{C}^1 , croissante et bornée. On a donc $\forall x > 0, x\mathcal{L}(f)(x) = \mathcal{L}(f')(x) + f(0)$. Mais, de plus, f' est bornée donc $f' \in F$ et donc, suivant la question précédente,

$$\mathcal{L}(f')(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

et donc $x\mathcal{L}(f)(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} f(0)$.

8. (a) On a $f \in C^0(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \ell$ donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} |f(t)| = |\ell| < |\ell| + 1$ et donc $\exists A \in \mathbf{R}_+, \forall t \geq A, |f(t)| \leq |\ell| + 1$. D'autre part, f est continue sur le segment $[0, A]$ donc elle y est bornée. On a ainsi $\forall t \in \mathbf{R}_+, |f(t)| \leq \text{Max} \left(\sup_{u \in [0, A]} |f(u)|, |\ell| + 1 \right)$. Ainsi $f \in F$.

- (b) En effectuant le changement de variable affine $t = \frac{u}{x}, dt = \frac{1}{x} du$, on a

$$x\mathcal{L}(f)(x) = x \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt} dt = x \int_0^{+\infty} f\left(\frac{u}{x}\right) e^{-u} \frac{1}{x} du$$

soit $x\mathcal{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} h(u) du$ avec $\forall u \in \mathbf{R}_+, h(u) = f\left(\frac{u}{x}\right) e^{-u}$.

(c) Comme le dit l'énoncé, utilisons le théorème de convergence dominée (version continue) :

– Pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, $u \mapsto f\left(\frac{u}{x}\right)e^{-u}$ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$.

– Pour tout $u \in \mathbf{R}_+$, $h(u) \leq e^{-u} f\left(\frac{u}{x}\right) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \ell e^{-u}$

– Domination : La fonction $\varphi : u \mapsto e^{-u} \|f\|_\infty$ est intégrable sur \mathbf{R}_+^* , et pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, pour tout $u \in]0, +\infty[$, $|h(u)| \leq \varphi u$.

On en déduit que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \mathcal{L}(f)(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \int_0^{+\infty} e^{-u} f\left(\frac{u}{x}\right) = \ell \int_0^{+\infty} e^{-u} = \ell$$

(d) Si $\ell \neq 0$,

$$\mathcal{L}(f)(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{\ell}{x}$$

9. (a) Puisque f est intégrable sur \mathbf{R}_+ donc aussi sur $[x, +\infty[$ pour $x \geq 0$, R est définie sur \mathbf{R}_+ et on a $\forall x \in \mathbf{R}_+$,

$$R(x) = R(0) - \int_0^x f(t) dt$$

Or, f étant continue sur \mathbf{R}_+ , $x \mapsto \int_0^x f(t) dt$ est de classe C^1 sur \mathbf{R}_+ et c'est une primitive de f . On a donc R est de classe C^1 sur \mathbf{R}_+ et $R' = -f$.

On ne peut pas appliquer directement le résultat de la question 5) à R qui n'est pas croissante en général. Cependant, d'une part $R' = -f$ appartient à E car $f \in E$ (hypothèse de la partie), d'autre part, R est continue sur \mathbf{R}_+ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} R(x) = 0 \in \mathbf{R}$ donc R appartient à F selon 8.a) et la démonstration de l'égalité au 5) n'utilise que que le caractère borné de la fonction f et le fait que f et f' soient dans E . Cette démonstration s'applique donc à R et donc $\mathcal{L}(f)(x) = R(0) - x \mathcal{L}(R)(x)$.

(b) On a déjà indiqué ci-dessus que $\lim_{t \rightarrow +\infty} R(t) = 0$ donc

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbf{R}_+, \quad \forall t \geq A, |R(t)| \leq \varepsilon$$

On a donc, pour $x > 0$, selon a)

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}(f)(x) - R(0)| &= |x \mathcal{L}(R)(x)| = x \left| \int_0^{+\infty} R(t) e^{-xt} dt \right| \\ &\leq x \int_0^{+\infty} |R(t)| e^{-xt} dt \quad \text{car } R \in E \\ &\leq x \int_0^A |R(t)| e^{-xt} dt + x \int_A^{+\infty} |R(t)| e^{-xt} dt \\ &\leq x \int_0^A |R(t)| dt + x \int_A^{+\infty} \varepsilon e^{-xt} dt \quad \text{car } \mathcal{U} \in E \\ &\leq x \int_0^A |R(t)| dt + x \int_0^{+\infty} \varepsilon e^{-xt} dt \end{aligned}$$

soit $\forall x > 0$, $|\mathcal{L}(f)(x) - R(0)| \leq x \int_0^A |R(t)| dt + \varepsilon$.

(c) A étant fixé, $x \int_0^A |R(t)| dt \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$ donc

$$\exists \eta > 0, \forall x \in]0, \eta[, \quad 0 \leq x \int_0^A |R(t)| dt \leq \varepsilon$$

donc $\forall x \in]0, \eta[, |\mathcal{L}(f)(x) - R(0)| \leq 2\varepsilon$. Donc $\mathcal{L}(f)$ se prolonge en 0 par $\mathcal{L}(f)(0) = \int_0^{+\infty} f(t) dt$.

Remarque : Dans le cas où, comme ici, f est supposée intégrable sur \mathbf{R}_+ , une simple application du théorème de convergence dominée donne le résultat ci-dessus. La démonstration proposée par l'énoncé a l'intérêt de s'appliquer aussi au cas où f n'est pas intégrable mais d'intégrale sur \mathbf{R}_+ improprement convergente