Dans tout ce problème, on note :
- $\mathcal{F}(\mathbf{R}^+, \mathbf{R})$ l'ensemble des applications de $\mathbf{R}^+$ dans $\mathbf{R}$;
- E l'ensemble des fonctions $f : \mathbf{R}^+ \longrightarrow \mathbf{R}$, continues, telles que, pour tout $x > 0$ réel, la fonction $t \longmapsto f(t)e^{-xt}$ soit intégrable sur $\mathbf{R}^+$;
- F l'ensemble des fonctions continues et bornées sur $\mathbf{R}^+$.

Pour tout f dans E, on appelle **transformée de Laplace** de f et on note $\mathcal{L}(f)$ la fonction définie pour tout $x > 0$ réel par :

$$\mathcal{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}dt.$$

1. **Question préliminaire**
   Soient $a \in \mathbf{R}$ et $f : [a, +\infty[\longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue par morceaux.
   Pour tout x dans $[a, +\infty[$, on pose : $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$.
   On considère les propositions suivantes :
   (i) f est intégrable sur $[a, +\infty[$;
   (ii) F admet une limite finie en $+\infty$.

   Donner, sans démonstration, toutes les implications possibles entre (i) et (ii) lorsque :
   (a) f est positive sur $[a, +\infty[$;

   (b) f n'est pas positive sur $[a, +\infty[$.

Partie I - Exemples et propriétés

2. (a) Démontrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbf{R}^+, \mathbf{R})$.
   (b) Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
   (c) Justifier que $\mathcal{L}$ est une application linéaire de E dans $\mathcal{F}(\mathbf{R}^+_*, \mathbf{R})$, espace vectoriel des applications de $]0, +\infty[$ dans $\mathbf{R}$.

3. (a) On considère $\mathcal{U} : \mathbf{R}^+ \longrightarrow \mathbf{R}$ définie par $\mathcal{U}(t) = 1$. Déterminer $\mathcal{L}(\mathcal{U})$.
   (b) Soit $\lambda \geqslant 0$ réel. On considère $h_\lambda : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbf{R}$ définie pour tout $t \geqslant 0$ réel par :

   $$h_\lambda(t) = e^{-\lambda t}.$$

   Démontrer que h_λ est dans E et déterminer $\mathcal{L}(h_\lambda)$.
4. Soient f dans E et n dans $\mathbf{N}$. On considère $g_n : t \longmapsto t^n f(t)$ de $[0, +\infty[$ dans $\mathbf{R}$.
   Pour $x > 0$, justifier l'existence de $A > 0$ tel que $t^n e^{-xt} \leqslant e^{-\frac{xt}{2}}$ pour tout $t \geqslant A$.
   En déduire que g_n est un élément de E.

5. **Transformée de Laplace d'une dérivée**
   Soit f dans E de classe C^1, croissante et bornée sur $[0, +\infty[$. Démontrer que f' est encore dans E et que l'on a :

   $$\forall x \in]0, +\infty[, \mathcal{L}(f')(x) = x\mathcal{L}(f)(x) - f(0).$$

6. **Régularité d'une transformée de Laplace**
   (a) Démontrer que, pour tout f dans E, la fonction $\mathcal{L}(f)$ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et que l'on a :
   $$\mathcal{L}(f)' = -\mathcal{L}(g_1)$$
   où g_1 est définie à la question **4**.
   (b) Démontrer que, pour tout f dans E, la fonction $\mathcal{L}(f)$ est de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$ et pour $x > 0$ et $n \in \mathbf{N}$, déterminer $\mathcal{L}(f)^{(n)}(x)$ à l'aide d'une transformée de Laplace.

Partie II - Comportements asymptotiques de la transformée de Laplace

Dans toute cette partie, f est un élément de E

7. On suppose dans cette question que f est dans F.
   (a) Déterminer la limite en $+\infty$ de $\mathcal{L}(f)$.

   (b) *Théorème de la valeur initiale*
   On suppose, de plus, que f est de classe C^1 et croissante sur $\mathbf{R}^+$, avec f' bornée sur $\mathbf{R}^+$. Démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} x\mathcal{L}(f)(x) = f(0)$.
8. **Théorème de la valeur finale**
   On suppose dans cette question que $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = l$ où l est un réel.
   (a) Démontrer que f appartient à F.
   (b) Démontrer que pour $x \in \mathbf{R}_*^+$, $x\mathcal{L}(f)(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} h(u)du$ où h est la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par : $h : u \mapsto e^{-u} f\left(\dfrac{u}{x}\right)$.
   (c) En déduire, à l'aide du théorème de convergence dominée, que : $\lim\limits_{x\to 0} x\mathcal{L}(f)(x) = l$.
   (d) Lorsque $l \neq 0$, déterminer un équivalent de $\mathcal{L}(f)(x)$ en 0.
9. Dans cette question, on suppose que f est intégrable sur $\mathbf{R}^+$ et on pose : $R(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} f(t)dt$ pour tout x dans $[0,+\infty[$.
   (a) Démontrer que R est une fonction de classe C^1 sur $[0,+\infty[$ et déterminer R'.
   En déduire que, pour tout $x > 0$ réel, on a : $\mathcal{L}(f)(x) = R(0) - x\mathcal{L}(R)(x)$.
   (b) On fixe $\varepsilon > 0$.
   Justifier de l'existence de A réel positif tel que pour tout $t \geqslant A$, on ait : $|R(t)| \leqslant \varepsilon$.
   En déduire que, pour tout $x > 0$, on a :
   $$|\mathcal{L}(f)(x) - R(0)| \leqslant x \int_0^A |R(t)|dt + \varepsilon.$$
   (c) Démontrer que $\mathcal{L}(f)$ se prolonge par continuité en 0 (on précisera la valeur en 0 de ce prolongement).