

E avec $\#E = n$.

$$S_n = \{ \text{bijections de } E \text{ dans } E \}$$

$$\#S_n = n!$$

$$\mathcal{Q}_n = \{ \sigma \in S_n \mid \forall i \in E, \sigma(i) \neq i \}$$

$$n! = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_{n-k}$$

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket \quad T_k = \{ \sigma \in S_n \text{ qui ont } k \text{ points fixes} \}$$

$$(\mathcal{Q}_n = T_0)$$

$$S_n = \bigcup_{k=0}^n T_k \text{ et } T_k \cap T_{k'} = \emptyset \quad (k \neq k')$$

$$n! = \#S_n = \sum_{k=0}^n \#T_k$$

Or une bijection σ dans T_k se donne par :

- les k points fixes ($\binom{n}{k}$ possibilités)
- la permutation sous points fixes des autres points.
(il y en a $n-k$)

$$\#T_k = \binom{n}{k} a_{n-k}$$

$$\text{Dnc } n! = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_{n-k}$$

$$b) \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n.$$

Par définition $0 \leq a_n \leq n!$ d'où $0 \leq \frac{a_n}{n!} \leq 1$

La série entière $\sum_{n \geq 0} 1 \cdot x^n$ a un rayon de cv égal à 1

Donc le rayon de cv R de $\sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n!} x^n$ est supérieur ou égal à 1.

$$c) \quad \forall x \in]-R, R[$$

$$e^x f(x) = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} b_k x^k \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{k!} x^k \right) \quad \text{où } b_k = \frac{1}{k!}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} C_n x^n$$

$$\text{où } C_n = \sum_{k=0}^n b_k \cdot \frac{a_{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!(n-k)!} a_{n-k}$$

$$= \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_{n-k} = 1.$$

$$\text{Donc } e^x f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

$$d) \quad e^x f(x) = \frac{1}{1-x}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{1-x} \cdot e^{-x}$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{+\infty} x^k \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} x^k \right)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \theta_n x^n \quad \text{où} \quad \theta_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$$

Unité DSE

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_n}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$$

$$\text{d'où} \quad a_n = n! \cdot \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$$

e) L'univers Ω est l'ensemble des permutations

$$\# \Omega = n! \quad D_n = \mathcal{D}_n$$

$$P(D_n) = \frac{\# D_n}{\# \Omega} = \frac{a_n}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-1} = \frac{1}{e}$$

$$\sum_{n \geq 1} \ln(n) x^n.$$

a) Par $x > 0$ on pose $u_n(x) = \ln(n) x^n > 0$ (pour $n \geq 2$)

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} &= \frac{\ln(n+1) x^{n+1}}{\ln(n) x^n} = \frac{\ln(n(1+\frac{1}{n}))}{\ln(n)} \cdot x \\ &= \frac{\ln(n) + \ln(1+\frac{1}{n})}{\ln(n)} x \xrightarrow{+\infty} x \end{aligned}$$

• Pour $x < 1$, $\sum u_n(x)$ CV (d'Alenbert) d'où $x \leq R$

D'où $\boxed{R \geq 1}$

• Pour $x > 1$, $\sum u_n(x)$ DV (d'Alenbert) d'où $x \geq R$

D'où $\boxed{R \leq 1}$

b) Soit $x \in]-1, 1[$

$$\begin{aligned} (x-1)g(x) &= (x-1) \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(n) x^n \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} \ln(n) x^{n+1} - \sum_{n=2}^{+\infty} \ln(n) x^n \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} \ln(n-1) x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} \ln(n) x^n \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} \ln(1-\frac{1}{n}) x^n \end{aligned}$$

c) $\forall n \geq 2$

$$\int_{n-1}^n \frac{dx}{x} = \left[\ln(x) \right]_{n-1}^n = \ln(n) - \ln(n-1) = \ln\left(\frac{n}{n-1}\right)$$

Donc $\frac{1}{n-1} \leq \ln\left(\frac{n}{n-1}\right) \leq \frac{1}{n-1}$ (car $x \mapsto \frac{1}{x}$ ↓)

Donc

$$\begin{aligned} (x-1)g(x) &= \sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) x^n \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(\frac{n-1}{n}\right) x^n \\ &= - \sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(\frac{n}{n-1}\right) x^n \end{aligned}$$

Also

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n \leq \sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(\frac{n}{n-1}\right) x^n \leq \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n-1} x^n$$

||

$-\ln(1-x) - x$

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n}$

||

$-x[\ln(1-x)]$

Donc

$$x \ln(1-x) \leq (x-1)g(x) \leq \ln(1-x) + x$$

Comme $x \ln(1-x) \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \ln(1-x)$; $\ln(1-x) + x \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \ln(1-x)$

$$\boxed{(x-1)g(x) \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \ln(1-x)}$$

24 p87

$$a_0 = a_1 = 1; \quad a_{n+1} = a_n + \frac{1}{n+1} a_{n-1}$$

a) ~~Chứng minh~~ Recurrence, $a_n \geq 0$

$$(a_n) \uparrow$$

$$\text{Đến } \underline{a_n > 0}$$

$$u_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 + \frac{1}{n+1} \frac{a_n}{a_n} = 1 + \frac{1}{(n+1)u_{n-1}}$$

$$\text{Đến } \text{vì } u_n \geq 1$$

$$1 \leq u_n = 1 + \frac{1}{(n+1)u_{n-1}} \leq 1 + \frac{1}{n+1}$$

$$(u_n) \rightarrow 0 \quad \text{"đến"} \quad \boxed{R=1}$$

b) $\forall x \in]-1, 1[$.

$$\begin{aligned} (1-x)f'(x) - (1+x)f(x) &= (1-x) \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} - (1+x) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) a_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n - a_0 \\ &= (a_1 - a_0) + \sum_{n=1}^{\infty} ((n+1) a_{n+1} - (n+1) a_n - a_{n-1}) x^n \\ &= 0 + \sum_{n=1}^{\infty} 0 \cdot x^n = 0. \end{aligned}$$

Pour $x \in]-1, 1[$.

$$f'(x) = \frac{x+1}{1-x} f(x) \quad (\bar{E})$$

On résout cette équation.

$$\frac{x+1}{1-x} = \frac{x-1+2}{1-x} = -1 + \frac{2}{1-x}.$$

Donc $x \mapsto -x - 2 \ln(1-x)$ est une primitive de $x \mapsto \frac{x+1}{1-x}$.

$$S_E = \left\{ x \mapsto \lambda e^{-x-2\ln(1-x)} = \lambda \frac{e^{-x}}{(1-x)^2} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Or $f(0) = 1 = a_0$ donc

$$f: x \mapsto \frac{\lambda e^{-x}}{(1-x)^2}$$