# Ex 1 p.59

$f$ continue telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = -1 + \int_0^{2x} t f(t/2)\, dt.$$

a). Soit $f$ une telle fonction. Je pose

$$H : x \longmapsto \int_0^x t f(t/2)\, dt. \quad / \; H'(x) = x f(x/2)$$

qui est $C^1$ (TFA) donc si:

$$f : x \longmapsto -1 + H(2x) \text{ alors } f \text{ est } C^1.$$

et $\forall x \in \mathbb{R}$.

$$f'(x) = 2H'(2x)$$
$$= 2.(2x f(x)) = 4x f(x)$$

b) $f$ vérifie $y' = 4xy$ et $y(0) = -1$

Comme $x \longmapsto 2x^2$ est une primitive de $x \longmapsto 4x$.

$$S_E = \{ x \longmapsto \lambda e^{2x^2} \mid \lambda \in \mathbb{R} \}$$

Nécessairement $f : x \longmapsto -e^{2x^2}$

Réciproquement pour $f = -e^{2x^2}$, $\displaystyle\int_0^{2x} t f(t/2)\, dt = \int_0^{2x} -t e^{+t^2/2} dt$

$$= \left[ -e^{+t^2/2} \right]_0^{2x} = -e^{2x^2} + 1$$

32 p 88

$a > 0$ $\quad h \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ bornée

(E) $\quad y' - ay = h(t)$

(H) $\quad y' - ay = 0$

$$S_H = \{ t \mapsto \lambda e^{at} \mid \lambda \in \mathbb{R} \}$$

Solution particulière $y : t \mapsto \lambda(t) e^{at}$

$$y' : t \mapsto \lambda'(t) e^{at} + a\lambda(t) e^{at}$$

$y$ vérifie (E) $\iff \forall t \in \mathbb{R}_+, \ \lambda'(t) e^{at} + \cancel{a\lambda(t) e^{at}} - \cancel{a\lambda(t) e^{at}} = h$

$$\iff \forall t \in \mathbb{R}_+, \ \lambda'(t) = e^{-at} h(t)$$

<u>Une</u> solution particulière

$$y : t \mapsto \left( \int_0^t e^{-au} h(u)\, du \right) e^{at}$$

$$S_E = \left\{ t \mapsto \left( \lambda + \int_0^t e^{-au} h(u)\, du \right) e^{at} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

~~[illegible]~~ $\forall u \in \mathbb{R}_+ \quad |e^{-au} h(u)| \leq e^{-au} \|h\|_\infty$

d'où $\int_0^{+\infty} e^{-au} h(u)$ ~~est~~ absolument convergente donc

Convergente.

$\left( t \mapsto \int_0^t e^{-au} h(u)\, du \right.$ a une limite finie en $\left. +\infty \right)$

- Si $\lambda \neq -\int_0^{+\infty} e^{-au} h(u)\,du$.

alors $\lambda + \int_0^t e^{-au} h(u)\,du \longrightarrow \lambda + \int_0^{+\infty} \cdots \neq 0$

d'où $y$ ~~...~~ tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ en $+\infty$

car $e^{at} \xrightarrow[t \to +\infty]{} +\infty$

- Si $\lambda = -\int_0^{+\infty} e^{-au} h(u)\,du$.

on a

$$y(t) = \left( -\int_0^{+\infty} e^{-au} h(u)\,du + \int_0^t e^{-au} h(u)\,du \right) e^{at}$$

$$= -\left( \int_t^{+\infty} e^{-au} h(u)\,du \right) e^{at}.$$

or

$$\left| \int_t^{+\infty} e^{-au} h(u)\,du \right| \leq \int_t^{+\infty} |e^{-au} h(u)|\,du.$$

$$\leq \int_t^{+\infty} e^{-au} \|h\|_\infty\,du.$$

$$\|h\|_\infty \left[ \frac{e^{-au}}{-a} \right]_t^{+\infty} = \frac{\|h\|_\infty e^{-at}}{a}.$$

$$|y(t)| \leq \frac{\|h\|_\infty}{a} e^{-at} \cdot e^{at} = \frac{\|h\|_\infty}{a}$$

49 p80

$q$ $2\pi$-periodique, continue, $\int_0^{2\pi} q(t)\,dt = 0$

$(E_n)$ $y'' + (1-q(nt))y(t) = 0$

$y_n$ la solution $y_n(0) = 0$, $y_n'(0) = 1$

$X_n : t \longmapsto \begin{pmatrix} y_n(t) \\ y_n'(t) \end{pmatrix}$ ; $X_n'(t) = \begin{pmatrix} y_n'(t) \\ y_n''(t) \end{pmatrix}$

a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in \mathbb{R}$

$$\langle X_n(t), X_n'(t) \rangle = y_n(t) y_n'(t) + y_n'(t) y_n''(t)$$

$$= y_n(t) y_n'(t) - y_n'(t)(1-q(nt)) y_n(t)$$

$$= q(nt) y_n'(t) y_n(t)$$

$$|\langle X_n(t), X_n'(t) \rangle| = |q(nt)|\,|y_n'(t) y_n(t)|$$

or $|ab| \leq \frac{1}{2}(a^2+b^2)$

$$|\langle X_n(t), X_n'(t) \rangle| \leq \frac{1}{2} |q(nt)| (y_n'(t)^2 + y_n(t)^2)$$

$$\leq \frac{1}{2} |q(nt)|\, \|X_n(t)\|^2$$

b). Soit $T>0$

$\forall t \in [0,T]$, $|y_n(t)| \leq \|X_n(t)\| = \sqrt{y_n^2(t)+(y_n')^2(t)}$

$|y_n'(t)| \leq \|X_n(t)\|$

On pose $u : t \longmapsto \|X_n(t)\|^2$.

$u'(t) = 2 \langle X_n(t) \mid X_n'(t) \rangle \leq |q(nt)|\, u(t)$

Comme $q$ est continue, $2\pi$-périodique, $q$ est bornée

$u'(t) \leq \|q\|_\infty u(t)$

$u'(t) = \|q\|_\infty u(t) \quad \dots \quad u(t) = \lambda e^{\|q\|_\infty t}$.

On considère $\varphi(t) = u(t) e^{-\|q\|_\infty t}$.

$\varphi'(t) = u'(t) e^{-\|q\|_\infty t} - u(t) \|q\|_\infty e^{-\|q\|_\infty t}$.

$= \big(\underbrace{u'(t) - u(t)\|q\|_\infty}_{\leq 0}\big) e^{-\|q\|_\infty t}$.

$\varphi$ décroît et positive d'où

$|\varphi(t)| \leq \varphi(0) = u(0) = 1$.

$0 \leq u(t) \leq 1 \cdot e^{\|q\|_\infty t} \leq e^{\|q\|_\infty T}$

$\|X_n\|^2 \leq e^{\|q\|_\infty T} \longrightarrow K = \sqrt{e^{\|q\|_\infty T}}$

c) On sait que $y_n$ vérifie l'équation.

(E) $$y_n'' - y_n = q(nt)\,y_n$$

On réalise une variation de la constante pour obtenir que.

$$y_n(t) = a(t)\cos t + b(t)\sin(t) \quad \text{où}$$

$a'$, $b'$ vérifie.

$$\begin{cases} a'(t)\cos t + b'(t)\sin(t) = 0 \\ -a'(t)\sin t + b'(t)\cos(t) = q(nt)\,y_n(t) \end{cases}$$

On inverse $\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$ en $\frac{1}{1}\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$

Donc

$$a'(t) = -\sin(t)\,q(nt)\,y_n(t)$$

$$b'(t) = \cos(t)\,q(nt)\,y_n(t)$$

On en déduit que.

$$y_n(t) = \left[\alpha + \int_0^x -\sin(t)\,q(nt)\,y_n(t)\right]\cos(x)$$

$$+ \left[\beta + \int_0^x \cos(t)\,q(nt)\,y_n(t)\right]\sin(x)$$

or $y_n(0) = 0$ donc $\alpha = 0$.

et $y_n'(1) = 1$ donc $\beta = 1$.

Finalement

$$y_n(t) = \left( \int_0^x - \sin(t) q(nt) y_n(t) \right) \cos x + \left( 1 + \int_0^x \cos(t) q(nt) y_n(t) \right) \sin x$$

Posons $F_n : x \longmapsto \int_0^x - \sin(t) q(nt) y_n(t)\, dt$

et $G_n : x \longmapsto \int_0^x \cos(t) q(nt) y_n(t)\, dt$.

On veut montrer que $(F_n) \xrightarrow{CU} \tilde{0}$

$(G_n) \xrightarrow{CU} \tilde{0}$

Pour $x \in [0, T]$, $Q$ une primitive de $q$.

$$\int_0^x - \sin(t) q(nt) y_n(t)\, dt = \left[ - \frac{Q(nt)}{n} \sin(t) y_n(t) \right]_0^x + \frac{1}{n} \int_0^x Q(nt) \cos(t) y_n(t)\, dt$$

$$+ \frac{1}{n} \int_0^x Q(nt) \sin(t) y_n'(t)\, dt.$$

$$= \frac{1}{n} \left[ - Q(nx) \sin(x) y_n(x) + \int_0^x Q(nt) \cos t\, y_n(t)\, dt + \int_0^x Q(nt) \sin(t) y_n'(t)\, dt \right]$$

Or $q$ étant $2\pi$-périodique de moyenne nulle, $Q$ est $2\pi$-périodique donc bornée.

Donc $$\left| F_n(x) \right| \leq \frac{1}{n} \left( \|Q\|_\infty \|y_n\|_\infty + T \|Q\|_\infty \|y_n\|_\infty + T \|Q\|_\infty \|y_n'\|_\infty \right)$$

$$\leq \frac{1}{n} \|Q\|_\infty (1 + 2T) K \quad (\text{ou } \|y_n\|_\infty \leq K ; \|y_n'\|_\infty \leq K)$$

D'où

$$\|F_n\|_\infty \leq \frac{1}{n}\|Q\|_\infty (2T+1)K \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

on a bien $(F_n) \xrightarrow{CU} \tilde{0}$

de même $(G_n) \xrightarrow{CU} \tilde{0}$

d'où $(\varphi_n) \xrightarrow{CU} (x \mapsto \sin x)$