2 p61 3/06/2021

$f(x,y) = (x^2-4y^2)(x^2-4y^2-8)$ $\underline{C^1}$

$= x^4 - 4x^2y^2 - 8x^2 - 4x^2y^2 + 16y^4 + 32y^2$

$= x^4 - 8x^2y^2 - 8x^2 + 16y^4 + 32y^2$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x^3 - 16xy^2 - 16x = 4x\,(\underline{x^2-4y^2-4})$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -16x^2y + 16\cdot 4y^3 + 16\cdot 4y = 16y\,(\underline{-x^2+4y^2+4})$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \iff \begin{cases} x=0 \text{ et } y=0 \\ \boxed{\text{ou}} \\ x^2-4y^2-4=0 \end{cases}$

Cas $(x,y) = (0,0)$

On a

$f(0+\alpha, 0+\beta) = f(\alpha,\beta) = \alpha^4 - 8\alpha^2\beta^2 \underline{- 8\alpha^2} + 16\alpha^4 + \underline{32\beta^2}$

$= -8\alpha^2 + 32\beta^2 + o(\|(\alpha,\beta)\|^2)$

or $(\alpha,\beta) \longmapsto -8\alpha^2 + 32\beta^2$ n'est pas de signe constant au voisinage de $(0,0)$ donc $(x,y)=(0,0)$ n'est pas un extremum (point selle)

Autre rédaction.

$$f(x,0) = (x^2)(x^2-8) = x^4 - 8x^2$$ négatif au voisinage de 0.

$$f(0,y) = (-4y^2)(-4y^2-8) = \cancel{4y^2 \cdot 4y^2+8}$$
$$= 4y^2(4y^2+8)$$ positif au voisinage de 0.

Cas où $\underline{x^2-4y^2-4=0}$

Soit (x_0,y_0) tel que $x_0^2-4y_0^2-4=0$.

$$f(x_0+\alpha, y_0+\beta) = \left((x_0+\alpha)^2 - 4(y_0+\beta)^2\right)\left((x_0+\alpha)^2 - 4(y_0+\beta)^2 - 8\right)$$

$$= \left(x_0^2 + 2\alpha x_0 + \alpha^2 - 4y_0^2 - 8y_0\beta - 4\beta^2\right)\left(\cdots\cdots - 8\right)$$

$$= \left(\underbrace{x_0^2-4y_0^2}_{4} + 2\alpha x_0 - 8y_0\beta + \alpha^2 - 4\beta^2\right)\left(\underbrace{x_0^2-4y_0^2-8}_{-4} + 2\alpha x_0 - 8y_0\beta + \alpha^2 - 4\beta^2\right)$$

$$= \left[\cancel{}\, 4 + 2\alpha x_0 - 8y_0\beta + \alpha^2 - 4\beta^2\right]\left[-4 + 2\alpha x_0 - 8y_0\beta + \alpha^2 - 4\beta^2\right]$$

$$= \left(\underbrace{2\alpha x_0 - 8y_0\beta}_{u} + \underbrace{\alpha^2 - 4\beta^2}_{v}\right)^2 - 16$$

$$= -16 + (2\alpha x_0 - 8y_0\beta)^2 + \underbrace{2(2\alpha x_0 - 8y_0\beta)(\alpha^2-4\beta^2) + (\alpha^2-4\beta^2)^2}_{O(\|\alpha,\beta\|^2)}$$

au voisinage de $(\alpha, \beta) = (0,0)$

$f(x_0+\alpha, y_0+\beta) - f(x_0,y_0)$ est du signe de $(2\alpha x_0 - 8y_0\beta)^2$ qui est positif. Donc (x_0,y_0) est un minimum de f.

7 p 62

$\varphi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $\varphi(0)=0$

$f : (x,y) \longmapsto \dfrac{\varphi(xy)}{x}$.

f est définie sur $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 , x \neq 0\}$

a) On sait que $\varphi(\alpha) = \varphi(0) + \alpha\varphi'(0) + o(\alpha)$

$$= \underbrace{\varphi(0)}_{0} + \alpha\varphi'(0) + \alpha\,\varepsilon(\alpha)$$

$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$, $x \neq 0$.

$$f(x,y) = \frac{xy\varphi'(0) + xy\,\varepsilon(xy)}{x}.$$

$$= y\varphi'(0) + y\,\varepsilon(xy)$$

$(x,y) \longrightarrow (0,y_0)$

$$\lim_{(x,y)\to(0,y_0)} f(x,y) = y_0\varphi'(0)$$

On pose $\underline{f(0,y_0) = y_0\varphi'(0)}$.

b) $\Delta = \{(x,y) \mid x = 0\}$.

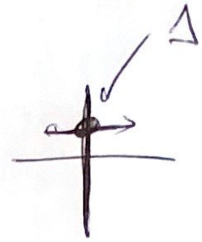
f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\overset{U}{\overset{\shortparallel}{\mathbb{R}^2\setminus\Delta}}$. et

$\forall (x,y)\in U$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{xy\varphi'(xy) - \varphi(xy)}{x^2}$; $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{x\varphi'(xy)}{x}$.

$$= \varphi'(xy)$$

· $\forall (x,y) \in \Delta$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,y)-f(0,y)}{x}$$



$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\varphi(xy)}{x} - y\varphi'(0)}{x}$$

$$\frac{\frac{\varphi(xy)}{x} - y\varphi'(0)}{x} = \frac{\varphi(xy) - xy\varphi'(0)}{x^2}$$

Or φ est de classe $\mathcal{C}^2$ d'où

$$\varphi(\alpha) = 0 + \alpha\varphi'(0) + \frac{\alpha^2}{2}\varphi''(0) + \alpha^2\varepsilon(\alpha)$$

$$\frac{\varphi(xy) - xy\,\varphi'(0)}{x^2} = \frac{\cancel{xy\varphi'(0)} + \frac{(xy)^2}{2}\varphi''(0) + (xy)^2\varepsilon(xy) - \cancel{xy\varphi'(0)}}{x^2}$$

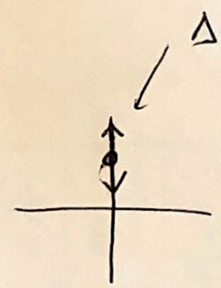
$$= \frac{y^2}{2}\varphi''(0) + y^2\varepsilon(xy)$$

$$\xrightarrow[(x,y)\to(0,y_0)]{} \frac{y_0^2}{2}\varphi''(0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y_0) = \frac{y_0^2}{2}\varphi''(0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,y_0) = \varphi'(0)$$

I dérivée de $y \mapsto y\varphi'(0)$



$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy\varphi'(xy) - \varphi(xy)}{x^2} & \text{si } x \neq 0. \\ \dfrac{y^2}{2}\varphi''(0) & \text{si } x = 0. \end{cases} \quad ?$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \varphi'(xy) & \text{si } x \neq 0. \\ \varphi'(0) & \text{si } x = 0. \end{cases} \quad \text{continue du } \mathbb{R}^1$$

Soit $(0,y_0) \in \Delta$, montrons que.

$$\lim_{(x,y) \to (0,y_0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,y_0) = \frac{y_0^2}{2}\varphi''(0)$$

Par cela on utilise que

- $\varphi(\alpha) = 0 + \alpha\varphi'(0) + \frac{\alpha^2}{2}\varphi''(0) + \alpha^2 \varepsilon(\alpha)$
- $\varphi'(\alpha) = \varphi'(0) + \alpha\varphi''(0) + \alpha\delta(\alpha) \qquad \delta(\alpha) \xrightarrow[\alpha \to 0]{} 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{xy\varphi'(xy) - \varphi(xy)}{x^2}$$

$$= \frac{xy\left[\cancel{\varphi'(0)} + xy\varphi''(0) + xy\,\delta(xy)\right] - \left[\cancel{xy\varphi'(0)} + \frac{(xy)^2}{2}\varphi''(0) + \dots\right]}{x^2}$$

$$= \frac{\frac{(xy)^2}{2}\varphi''(0) + (xy)^2\left(\delta(xy) + \varepsilon(xy)\right)}{x^2} \xrightarrow[(x,y) \to (0,y_0)]{} \frac{1}{2} y_0^2 \varphi''(0)$$

Donc

$\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$

D'où f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

---

5 p61

$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ symétrique $Sp(f) \subset \mathbb{R}_+^*$

a) Théorème spectrale. Il existe BON $(e_1 \ldots e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ telle que $\forall i \in [\![1, n]\!]$

$$f(e_i) = \lambda_i e_i \quad (\lambda_i > 0)$$

Par $x \in \mathbb{R}^n$,

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \qquad (x_i = e_i^*(x))$$

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i e_i$$

$$(f(x) | x) = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i e_i \,\middle|\, \sum_j x_j e_j \right)$$

$$= \sum_i \sum_j \lambda_i x_i x_j (e_i | e_j)$$

$$= \sum_i \lambda_i x_i^2 > 0 \quad \text{si } \underline{x \neq 0}$$

b) $u \in \mathbb{R}^n$

$$g : x \longmapsto (f(x)|x) - (u|x) \qquad (\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R})$$

Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et $h \in \mathbb{R}^n$

$$g(x_0+h) = (f(x_0+h)\,|\,x_0+h) - (u\,|\,x_0+h)$$

$$= (f(x_0)+f(h)\,|\,x_0+h) - (u\,|\,x_0+h)$$

$$= (f(x_0)|x_0) + (f(x_0)|h) + (f(h)|x_0) + (f(h)|h)$$
$$- (u|x_0) - (u|h)$$

$$= g(x_0) + (f(x_0)|h) + (f(h)|x_0) - (u|h)$$
$$+ (f(h)|h)$$

On pose $\varphi_{x_0} : h \longmapsto (2f(x_0) - u\,|\,h)$ linéaire

comme f est linéaire donc lipschitzienne, $\exists K \in \mathbb{R}_+^*$

$\|f(h)\| \leq K . \|h\|$. C.S

$$\underbrace{|(f(h)|h)|}_{o(h)} \leq \|f(h)\| . \|h\| \leq K . \|h\|^2$$

g differentiable en x_0.

$$dg_{x_0} : h \longmapsto (2f(x_0) - u\,|\,h)$$

Autre rédaction (en coordonnées)

Soit $(e_1 \dots e_n)$ BON de vecteurs propres.

Soit $x = \sum x_i e_i$ on pose $u = \sum u_i e_i$

$$g(x) = (f(x)|x) - (u|x)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 - \sum u_i x_i$$

$$\frac{\partial g}{\partial x_{i_0}}(x_1 \dots x_n) = \cancel{\sum_{i=1}^{n}} \, 2\lambda_{i_0} x_{i_0} - u_{i_0} x_{i_0}$$

$\frac{\partial g}{\partial x_{i_0}}$ continue sur $\mathbb{R}^n$.

g est de classe $\mathcal{C}^1$ d'où différentiable.

ii) Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$

x_0 pt critique $\Leftrightarrow df_{x_0} = \tilde{0}$

$$\Leftrightarrow \forall h \in \mathbb{R}^n, \; \underbrace{df_{x_0}(h)}_{=\,(2f(x_0)-u\,|\,h)} = 0_{\mathbb{R}}$$

$$\Leftrightarrow 2f(x_0) - u = 0_{\mathbb{R}^n}$$

$$\Leftrightarrow f(x_0) = \frac{u}{2}$$

Ici, $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ et $0 \notin Sp(f)$

donc f est un automorphisme. (il est bijectif)

$\exists !\, x_0 \in \mathbb{R}^n, \quad f(x_0) = \frac{u}{2} \qquad (x_0 = f^{-1}(u/2))$

on fixe x_0 le point critique.

Pour $h \in \mathbb{R}^n$

$$g(x_0+h) = g(x_0) + \underbrace{df_{x_0}(h)}_{0} + \underbrace{(f(h)|h)}_{\geqslant 0}$$

D'où x_0 est un <u>minimum</u>.