Exercice (Mines-Ponts 2015)

Soit f une fonction $\mathscr{C}^2(\mathbf{R}^2,\mathbf{R})$ telle que : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0.$

1. *Montrer qu'il existe g fonction de $\mathscr{C}^2(\mathbf{R}^2,\mathbf{R})$ telle que* $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{\partial g}{\partial y}$ *et* $\dfrac{\partial f}{\partial y}=-\dfrac{\partial g}{\partial x}$.

   On pourra écrire
$$g(x,y)=C+\int_0^1 \frac{d}{dt}(g(tx,ty))dt$$
2. *Soit* $\varphi(r)=\displaystyle\int_0^{2\pi} f(r\cos(t),r\sin(t))dt$ *montrer que φ est $\mathscr{C}^1$ et calculer $r\times\varphi'(r)$.*
3. *Montrer que φ est constante.*

Solution :

1. Procédons par analyse-synthèse.

— Analyse : Supposons qu'il existe une fonction $g\in\mathscr{C}^2(\mathbf{R}^2,\mathbf{R})$ telle que $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{\partial g}{\partial y}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}=-\dfrac{\partial g}{\partial x}$. D'après le théorème fondamental de l'analyse, pour tout $(x,y)\in\mathbf{R}^2$,
$$g(x,y)=g(0,0)+\int_0^1 \frac{d}{dt}(g(tx,ty))dt$$
Or,
$$\frac{d}{dt}(g(tx,ty))=x\frac{\partial g}{\partial x}(tx,ty)+y\frac{\partial g}{\partial y}(tx,ty)=-x\frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty)+y\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty)$$
On en déduit que
$$g(x,y)=g(0,0)+\int_0^1 -x\frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty)+y\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty)dt$$

— Synthèse : On pose
$$g:(x,y)\mapsto\int_0^1 -x\frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty)+y\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty)dt$$
On peut choisir de prendre $g(0,0)=0$ pour simplifier les calculs car g n'intervient dans le problème que par ses dérivées partielles. Montrons que g vérifie les conditions voulues.
On pose
$$h:(t,x,y)\mapsto -x\frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty)+y\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty)$$
On fixe $y_0\in\mathbf{R}$. Vérifions que $x\mapsto g(x,y_0)=\displaystyle\int_0^1 h(t,x,y_0)dt$ est de classe $\mathscr{C}^1$ par le théorème de caractère $\mathscr{C}^1$ des intégrales à paramètres.

i) Pour tout $x\in\mathbf{R}$, la fonction $t\mapsto h(t,x,y_0)$ est continue (par morceaux) et intégrable sur $[0,1]$.

ii) Pour tout $t\in[0,1]$, la fonction $x\mapsto h(t,x,y_0)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et
$$\frac{\partial h}{\partial x}(t,x,y_0)=-\frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty_0)-tx\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(tx,ty_0)+ty_0\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(tx,ty_0)$$

iii) La fonction $\dfrac{\partial h}{\partial x}$ vérifie les hypothèses du théorème de continuité :

α) Pour tout $x \in \mathbf{R}$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial h}{\partial x}(t, x, y_0)$ est continue (par morceaux) sur $[0, 1]$.

β) Pour tout $t \in [0, 1]$, la fonction $x \mapsto \dfrac{\partial h}{\partial x}(t, x, y_0)$ est continue

γ) (Domination) Soit K un segment de $\mathbf{R}$, la fonction $\dfrac{\partial h}{\partial x}$ est continue sur $[0, 1] \times K \times \{y_0\}$ qui est un compact (produit de compact). Elle est donc bornée. Soit M tel que

$$\forall (t, x) \in [0, 1] \times K, \ \left|\frac{\partial h}{\partial x}(t, x, y_0)\right| \leqslant M$$

La fonction $t \mapsto M$ est intégrable sur $[0, 1]$.

On obtient que $x \mapsto g(x, y_0)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y_0) = \int_0^1 -\frac{\partial f}{\partial y}(tx, ty_0) - tx\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(tx, ty_0) + ty_0\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(tx, ty_0)dt$$

On utilise alors une intégration par parties ainsi que l'hypothèse :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 -\frac{\partial f}{\partial y}(tx, ty_0)dt &= \left[-t\frac{\partial f}{\partial y}(tx, ty_0)\right]_0^1 + \int_0^1 tx\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(tx, ty_0) + ty_0\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(tx, ty_0)\\
&= -\frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0) + \int_0^1 tx\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(tx, ty_0) - ty_0\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(tx, ty_0)
\end{aligned}$$

On obtient bien que $\dfrac{\partial g}{\partial x} = -\dfrac{\partial f}{\partial y}$. On vérifie de même que $\dfrac{\partial g}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial x}$.

2. Montrons que φ est de classe $\mathscr{C}^1$. On pose $h : (r, t) \mapsto f(r\cos(t), r\sin(t))$ et on applique le théorème de caractère $\mathscr{C}^1$ des intégrales à paramètres.
Les hypothèses de continuité sont vérifiées. On a de plus

$$\forall (r, t) \in \mathbf{R}_+ \times [0, 2\pi], \frac{\partial h}{\partial r}(r, t) = \cos(t)\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos(t), r\sin(t)) + \sin(t)\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos(t), r\sin(t))$$

Pour tout segment $[0, R] \subset \mathbf{R}_+$, par continuité de la fonction $(r, t) \mapsto \dfrac{\partial h}{\partial r}(r, t)$, on sait qu'elle est bornée sur le compact $[0, R] \times [0, 2\pi]$. Cela permet de vérifier l'hypothèse de domination.
La fonction φ est donc de classe $\mathscr{C}^1$ et

$$r\varphi'(r) = \int_0^{2\pi} r\cos(t)\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos(t), r\sin(t)) + r\sin(t)\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos(t), r\sin(t))dt$$

3. D'après la question précédente,

$$\begin{aligned}
r\varphi'(r) &= \int_0^{2\pi} r\cos(t)\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos(t), r\sin(t)) + r\sin(t)\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos(t), r\sin(t))dt\\
&= \int_0^{2\pi} r\cos(t)\frac{\partial g}{\partial y}(r\cos(t), r\sin(t)) - r\sin(t)\frac{\partial g}{\partial x}(r\cos(t), r\sin(t))dt\\
&= \int_0^{2\pi} \theta'(t)dt\\
&= \theta(2\pi) - \theta(0) = 0
\end{aligned}$$

où $\theta : t \mapsto g(r\cos(t), r\sin(t))$.
Cela montre que φ' est nulle sur $]0, +\infty[$ et donc que φ est constante.