Exercice 1

Étudier la convergence de $\displaystyle\int_{]0,\infty[} \frac{x \ln x}{(1+x^2)^\alpha} dx$ ($\alpha \in \mathbb{R}$).
Calculer l'intégrale pour $\alpha = 2$.

Exercice 2

On pose pour tout entier naturel n non nul,

$$u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2nx) \text{cotan}(x) dx \text{ et } v_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2nx)}{x} dx.$$

1) Montrer que les intégrales u_n et v_n existent.
2) Montrer que u_n ne dépend pas de n.
3) On considère sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ la fonction $h : x \mapsto \text{cotan}(x) - \dfrac{1}{x}$
   a) Montrer que h se prolonge par continuité en 0. On note encore h le prolongement.
   b) Montrer que h est alors une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$
4) Montrer que si f est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$,

$$\lim_{p \to \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin(px) dx = 0.$$

   En déduire que $(u_n - v_n)$ converge vers 0.
5) a) Montrer que $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ converge.
   b) Calculer I.
6) En déduire les valeurs de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^2} dx$ et de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3(x)}{x^3} dx$.