

1) Soit  $k \in \mathbb{N}^*$  :  $\forall t \in [k, k+1]$ ,  $\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$  (par décroissance de  $t \mapsto \frac{1}{t}$  sur  $[k, k+1]$ ).

Par croissance de l'intégrale, on a donc :  $\int_k^{k+1} \frac{1}{k+1} dt = \frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k} dt = \frac{1}{k}$

$$\text{Ainsi } \boxed{\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k}}$$

2) a) Pour un entier  $n$  non nul, on somme de  $k=1$  à  $k=n-1$  :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} = -1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt = \int_1^n \frac{1}{t} dt \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{n} \quad (\text{on a utilisé la relation de Chasles})$$

$$\text{Ainsi } -1 + H_n \leq \int_1^n \frac{1}{t} dt = \ln(n) \leq H_n - \frac{1}{n} \text{ et donc}$$

$$\ln(n) + \frac{1}{n} \leq H_n \leq \ln(n) + 1$$

b) Pour  $n \geq 2$ , on divise par  $\ln(n) > 0$  et donc :  $1 + \frac{1}{\ln(n)n} \leq \frac{H_n}{\ln n} \leq 1 + \frac{1}{\ln(n)}$  et donc par le théorème d'encadrement,  $\left(\frac{H_n}{\ln n}\right)$  converge vers 1, et finalement

$$\boxed{H_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)}$$

3) a) Pour tout  $n$  non nul,  $u_{n+1} - u_n = H_{n+1} - H_n - \ln(n+1) + \ln(n) = \frac{1}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{1}{t} dt \leq 0$  d'après 1). La suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  est donc décroissante.

b) D'après 2) a), pour tout  $n \geq 1$ , on a :  $0 \leq \frac{1}{n} \leq u_n \leq 1$ , donc  $u_n \in [0, 1]$  est une suite minorée et décroissante, donc elle converge vers  $\gamma$ .

Comme pour tout  $n \geq 1$ , on a :  $0 \leq u_n \leq 1$ , par passage à la limite on a  $0 \leq \gamma \leq 1$ .

4) a) Les applications  $f'$  et  $t \mapsto \left(t - k - \frac{1}{2}\right)^2$  étant de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[k, k+1] \subset ]0, +\infty[$ , on peut opérer une intégration par parties :

$$\begin{aligned} J_k &= \frac{1}{2} \left[ \left(t - k - \frac{1}{2}\right)^2 f'(t) \right]_k^{k+1} - \int_k^{k+1} \left(t - k - \frac{1}{2}\right) f'(t) dt \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{4} f'(k+1) - \frac{1}{4} f'(k) \right) - \int_k^{k+1} \left(t - k - \frac{1}{2}\right) f'(t) dt \end{aligned}$$

Par une nouvelle intégration par partie, on obtient :

$$\begin{aligned} J_k &= \frac{1}{8} (f'(k+1) - f'(k)) - \left[ \left(t - k - \frac{1}{2}\right) f(t) \right]_k^{k+1} + \int_k^{k+1} f(t) dt \\ &= \frac{1}{8} (f'(k+1) - f'(k)) - \left( \frac{1}{2} f(k+1) - \left(-\frac{1}{2}\right) f(k) \right) + \int_k^{k+1} f(t) dt \end{aligned}$$

et donc finalement :

$$J_k = \frac{f'(k+1) - f'(k)}{8} - \frac{f(k+1) + f(k)}{2} + \int_k^{k+1} f(t) dt$$

b) Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on somme cette relation de  $k = 1$  à  $k = n - 1$  :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} J_k &= \frac{1}{8} \sum_{k=1}^{n-1} f'(k+1) - \frac{1}{8} \sum_{k=1}^{n-1} f'(k) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} f(k+1) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} f(k) + \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} f(t) dt = \\ &= \frac{1}{8} \sum_{k=2}^n f'(k) - \frac{1}{8} \sum_{k=1}^{n-1} f'(k) - \frac{1}{2} \sum_{k=2}^n f(k) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} f(k) + \int_1^n f(t) dt \quad (\text{par la relation de Chasles} \\ &\text{pour la dernière somme}). \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi : } \sum_{k=1}^{n-1} J_k = \frac{1}{8} f'(n) - \frac{1}{8} f'(1) - \frac{1}{2} \left( \sum_{k=1}^n f(k) - f(1) \right) - \frac{1}{2} \left( \sum_{k=1}^n f(k) - f(n) \right) + \int_1^n f(t) dt$$

Ce qui est la relation annoncée, en réorganisant légèrement...

$$\sum_{k=1}^n f(k) = \frac{f(1) + f(n)}{2} + \frac{f'(n) - f'(1)}{8} + \int_1^n f(t) dt - \sum_{k=1}^{n-1} J_k$$

5) a)  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  et  $f''(x) = \frac{2}{x^3}$ .

$$\forall t \in [k, k+1], \frac{2}{(k+1)^3} \leq \frac{2}{t^3} \leq \frac{2}{k^3} \quad (\text{par décroissance de } t \mapsto \frac{1}{t^3} \text{ sur } [k, k+1]).$$

En multipliant par  $\left(t - k - \frac{1}{2}\right)^2$  qui est positif, on a :

$$\forall t \in [k, k+1], 2 \frac{\left(t - k - \frac{1}{2}\right)^2}{(k+1)^3} \leq 2 \frac{\left(t - k - \frac{1}{2}\right)^2}{t^3} \leq 2 \frac{\left(t - k - \frac{1}{2}\right)^2}{k^3}; \text{ par croissance de l'intégrale, on a donc :}$$

$$\frac{1}{(k+1)^3} \int_k^{k+1} \left(t - k - \frac{1}{2}\right)^2 dt \leq J_k = \int_k^{k+1} \frac{\left(t - k - \frac{1}{2}\right)^2}{t^3} dt \leq \frac{1}{k^3} \int_k^{k+1} \left(t - k - \frac{1}{2}\right)^2 dt.$$

$$\text{Or } \int_k^{k+1} \left(t - k - \frac{1}{2}\right)^2 dt = \frac{1}{3} \left[ \left(t - k - \frac{1}{2}\right)^3 \right]_k^{k+1} = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{8} - \left(-\frac{1}{8}\right) \right) = \frac{1}{12}.$$

$$\text{d'où } \frac{1}{12(k+1)^3} \leq J_k \leq \frac{1}{12k^3}.$$

b) La série de terme général  $J_k$  étant à terme positif, on a  $0 \leq J_k \leq \frac{1}{12k^3}$ , donc comme la série de terme général  $\frac{1}{k^3}$  est une série de Riemann convergente ( $3 > 1$ ), la série de terme général  $\frac{1}{12k^3}$  est convergente (opérations algébriques sur les séries convergentes), et donc la série  $\sum (J_k)$  converge par comparaison.

c) C'est la même démarche que dans les questions 1) et 2) :

$$\text{Pour tout } k \geq 2 \text{ on a } \frac{1}{(k+1)^3} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^3} \leq \frac{1}{k^3} \text{ car la fonction } t \mapsto \frac{1}{t^3} \text{ décroît sur } [k, k+1].$$

On en déduit à l'aide de la relation de Chasles en sommant de  $k = n$  à  $k = N$  que pour tout  $n \leq N$  :

$$\sum_{k=n}^N \frac{1}{(k+1)^3} \leq \int_n^{N+1} \frac{dt}{t^3} = \frac{1}{2}(n^{-2} - (N+1)^{-2}) \leq \sum_{k=n}^N \frac{1}{k^3}$$

$$\text{ou encore : } \sum_{k=n+1}^{N+1} \frac{1}{k^3} = -\frac{1}{n^3} + \sum_{k=n}^{N+1} \frac{1}{k^3} \leq \frac{1}{2}(n^{-2} - (N+1)^{-2}) \leq \sum_{k=n}^N \frac{1}{k^3}$$

$$\text{Passant à la limite quand } N \rightarrow \infty, \text{ il vient : } \boxed{R_{n-1} - \frac{1}{n^3} \leq \frac{1}{2n^2} \leq R_{n-1}}.$$

d) Par 5) a),

on a  $\frac{1}{12} \sum_{k=n}^N \frac{1}{(k+1)^3} = \frac{1}{12} \sum_{k=n+1}^{N+1} \frac{1}{k^3} \leq \sum_{k=n}^N J_k \leq \frac{1}{12} \sum_{k=n}^N \frac{1}{k^3}$ ; comme les trois séries intervenant dans l'inégalité sont convergentes, en passant à la limite on a :

$$-\frac{1}{12} \frac{1}{n^3} + \frac{1}{12} R_{n-1} \leq \sum_{k=n}^{+\infty} J_k \leq \frac{1}{12} R_{n-1} \text{ et donc finalement par la question précédente :}$$

$$\boxed{\frac{1}{24n^2} - \frac{1}{12n^3} \leq \sum_{k=n}^{+\infty} J_k \leq \frac{1}{24n^2} + \frac{1}{12n^3}}$$

• Ainsi :  $\frac{1}{24} - \frac{1}{12n} \leq n^2 \sum_{k=n}^{+\infty} J_k \leq \frac{1}{24} + \frac{1}{12n}$  et donc par le théorème d'encadrement,  $\left( n^2 \sum_{k=n}^{+\infty} J_k \right)$

converge vers  $\frac{1}{24}$ , finalement :  $\boxed{\sum_{k=n}^{+\infty} J_k \sim \frac{1}{24n^2}}$ .

e) Ceci se traduit par :  $\sum_{k=n}^{+\infty} J_k = \frac{1}{24n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ .

On a ainsi :  $S = \sum_{k=0}^{n-1} J_k + \sum_{k=n}^{+\infty} J_k = \sum_{k=0}^{n-1} J_k + \frac{1}{24n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ .

Ainsi, par 4)b) appliqué à  $f$  définie au début de 5) :

$$\sum_{k=1}^{n-1} J_k = S - \frac{1}{24n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{\frac{-1}{n^2} - (-1)}{8} + \frac{1 + \frac{1}{n}}{2} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \int_1^n \frac{dt}{t}$$

$$\text{d'où : } \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n - \ln 1 - \underbrace{S + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{2n}}_{=\beta} + \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{8}\right) \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Ainsi  $H_n = \ln(n) + \beta + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ .

D'où :  $u_n = \beta + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$  tend vers  $\beta$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

Or par 3) b),  $(u_n)$  converge vers  $\gamma$ ; par unicité de la limite,  $\beta = \gamma$ .