Exercice 1 : Transformation d'Abel

1) a) Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites réelles ou complexes.

   On pose pour $n \geqslant 0$: $B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$, avec la convention $B_{-1} = 0$.

   Montrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 0$:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k b_k = a_n B_n + \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k$$

   b) On suppose maintenant que (a_n) est une suite réelle.
   Montrer que si la suite (B_n) est bornée et que la suite (a_n) est décroissante vers 0, la série $\sum_{k\geqslant 0} a_k b_k$ est convergente.
   On pourra montrer que la série $\sum_{k\geqslant 0} (a_k - a_{k+1}) B_k$ est absolument convergente.

2) a) Calculer les sommes partielles de la série $\sum_{k\geqslant 0} \sin k$ et justifier qu'elles forment une suite bornée.

   b) Montrer que $\sum_{k\geqslant 0} \dfrac{\sin k}{\ln(k+2)}$ est convergente.

Exercice 2 :

Soit (u_n) une suite réelle à termes strictement positifs.
On pose pour tout entier n naturel non nul, $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$.
On suppose que la série $\sum u_n$ diverge et que (u_n) est majorée.

1) Montrer que

$$\frac{u_n}{S_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\ln\left(\frac{S_{n-1}}{S_n}\right)$$

2) En déduire que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{S_k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln S_n$$