Exercice 1 : Transformation d'Abel

1) a) Soit n un entier naturel. Pour tout entier naturel k, $b_k = B_k - B_{k-1}$. On en déduit que :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} a_k b_k &= \sum_{k=0}^{n} a_k(B_k - B_{k-1}) \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k B_k - \sum_{k=1}^{n} a_k B_{k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k B_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} B_k \\ &= a_n B_n + \sum_{k=0}^{n-1}(a_k - a_{k+1})B_k\end{aligned}$$

Remarque : Il y a un analogie avec l'intégration par parties, le passage aux sommes partielles étant analogue à une primitivation, et les taux d'accroissement $a_{k+1} - a_k = \frac{a_{k+1}-a_k}{(k+1)-1}$ étant analogues à des dérivées.

b) On suppose que (B_n) est bornée et que (a_n) est décroissante. Pour tout entier naturel k,

$$|(a_k - a_{k+1})B_k| \leqslant |a_k - a_{k+1}|M = (a_k - a_{k+1})M$$

où M est un majorant de $(|B_n|)$. Notons que le fait que (a_n) décroit permet d'enlever les valeurs absolues autour de $(a_k - a_{k+1})$.
La suite (a_n) décroit vers 0, c'est donc une suite de réels positifs. De ce fait, pour tout entier naturel n,

$$\sum_{k=0}^{n} |(a_k - a_{k+1})B_k| \leqslant \sum_{k=0}^{n}(a_k - a_{k+1})M = M(a_0 - a_{n+1}) \leqslant Ma_0$$

La série $\sum\limits_{k\geqslant 0} |(a_k - a_{k+1})B_k|$ est donc une série positive dont les sommes partielles sont majorées. C'est une série convergente.
Cela prouve de que la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} (a_k - a_{k+1})B_k$ est absolument convergente donc convergente.
De plus, la suite $(a_n B_n)$ converge (vers 0) car (a_n) tend vers 0 et que (B_n) est bornée. On obtient finalement que la suite des sommes partielles de la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} a_k b_k$ converge ce qui prouve que la série est convergente.
Remarque : la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} a_k b_k$ n'est pas à priori absolument convergente.

2) a) Pour tout entier naturel n,

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} \sin(k) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Im}(e^{ik}) = \mathrm{Im}\left(\sum_{k=0}^{n} e^{ik}\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{1 - e^{i(n+1)}}{1 - e^{i}}\right)$$

Or pour tout complexe z, $|\mathrm{Im}(z)| \leqslant |z|$ (pour tous réels x, y on a $|y| = \sqrt{y^2} \leqslant \sqrt{x^2 + y^2}$).
Donc

$$|B_n| \leqslant \left|\frac{1 - e^{i(n+1)}}{1 - e^{i}}\right| = \frac{|1 - e^{i(n+1)}|}{|1 - e^{i}|} \leqslant \frac{|1| + |e^{i(n+1)}|}{|1 - e^{i}|} = M$$

avec $M = \frac{2}{|1-e^i|}$ (qui vaut aussi $\frac{1}{\sin\frac{1}{2}}$)

Remarque : on peut aussi calculer explicitement B_n en utilisant que

$$1 - e^{i(n+1)} = -e^{i\frac{n+1}{2}} \times 2i\sin\left(\frac{n+1}{2}\right)$$

et que

$$1 - e^{i} = -e^{\frac{i}{2}} \times 2i\sin\left(\frac{1}{2}\right)$$

b) Posons $b_k = \sin k$, $a_k = \frac{1}{\ln(k+2)}$ et $u_k = a_k b_k$. La série $\sum\limits_{k\geqslant 0} \dfrac{\sin k}{\ln(k+2)}$ converge d'après la question 1.b.

Exercice 2 :

1) Soit $n \geqslant 2$, $S_{n-1} = S_n - u_n$. On en déduit que

$$\frac{S_{n-1}}{S_n} = \frac{S_n - u_n}{S_n} = 1 - \frac{u_n}{S_n}$$

Comme $\sum u_n$ est une série à termes positifs divergente, $(S_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. De plus (u_n) est bornée (car positive et majorée) donc $\dfrac{u_n}{S_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Donc

$$-\ln\left(\frac{S_{n-1}}{S_n}\right) = -\ln\left(1 - \frac{u_n}{S_n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{u_n}{S_n}$$

2) On pose pour $n \geqslant 2$, $v_n = -\ln\left(\dfrac{S_{n-1}}{S_n}\right) = \ln(S_n) - \ln(S_{n-1})$. Comme S_n tend vers $+\infty$, $\ln(S_n)$ tend aussi vers $+\infty$ et donc, la série $\sum v_n$ diverge puisque la série $\sum v_n$ à la même nature que la suite $(\ln(S_n))$. De plus, la suite u_n étant à termes positifs, la suite (S_n) est croissante et donc la suite (v_n) est à termes positifs.

On peut appliquer la sommation des équivalents pour obtenir que

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{u_k}{S_k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=2}^{n} \ln(S_k) - \ln(S_{k-1}) = \ln(S_n) - \ln(S_1).$$

Finalement on a bien $\boxed{\sum\limits_{k=1} \dfrac{u_k}{S_k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(S_n)}$