Problème 1 : Séries

1) a) Pour tout naturel n non nul,

$$\begin{aligned} S_{2(n+1)} - S_{2n} &= \sum_{k=1}^{2n+2} (-1)^{k-1} a_k - \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k-1} a_k \\ &= a_{2n+1} - a_{2n+2} \geqslant 0 \end{aligned}$$

et pour tout naturel n,

$$S_{2(n+1)+1} - S_{2n+1} = -a_{2n+2} + a_{2n+3} \leqslant 0$$

Ainsi $\boxed{\text{la suite } (S_{2n})_{n\geqslant 1} \text{ croît et la suite } (S_{2n+1})_{n\geqslant 0} \text{ décroît.}}$
De plus $S_{2n+1} - S_{2n} = a_{2n+1} \underset{n\to\infty}{\to} 0$.
Donc les suites $(S_{2n})_{n\geqslant 1}$ et $(S_{2n+1})_{n\geqslant 1}$ sont $\boxed{\text{adjacentes}}$.
Donc elles convergent vers un même limite ℓ.
Par théorème, (S_n) converge vers l donc $\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 0} (-1)^{n-1} a_n \text{ converge}}$ et sa somme est ℓ.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$S_{2n} \leqslant \ell \leqslant S_{2n+1}$$

donc

$$\boxed{0 \leqslant \ell - S_{2n} \leqslant a_{2n+1}}$$

donc

$$|S_{2n} - \ell| = \ell - S_{2n} \leqslant a_{2n+1}$$

et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_{2n+2} \leqslant \ell \leqslant S_{2n+1}$$

donc

$$\boxed{-a_{2n+2} \leqslant \ell - S_{2n+1} \leqslant 0}$$

donc

$$|S_{2n+1} - \ell| = S_{2n+1} - \ell \leqslant a_{2n+2}$$

Ainsi pour tout naturel non nul n, pair ou impair,

$$\boxed{|S_n - \ell| \leqslant a_{n+1}}$$

2) a) Une somme de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison (ici $-t$) différente de 1 est égale à

$$(1^{er}\ terme) \times \frac{1 - raison^{\text{nombre de termes}}}{1 - raison}$$

Donc

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k t^k = \sum_{k=0}^{n-1} (-t)^k = \frac{1 - (-t)^n}{1 - (-t)} = \boxed{\frac{1 + (-1)^{n+1} t^n}{1 + t}}$$

b) Soit $x \in]-1,1]$.

$$\int_0^x \left(\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k t^k\right) dt = \int_0^x \frac{1+(-1)^{n+1}t^n}{1+t} dt$$

Par linéarité de l'intégrale,

$$\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^x (-1)^k t^k dt = \int_0^x \frac{1}{1+t}dt + (-1)^{n+1}\int_0^x \frac{t^n}{1+t}dt$$

et ainsi

$$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} + (-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t}dt = \ln(1+x)$$

donc par changement d'indice $k = p-1$, $p = k+1$,

$$\boxed{\ln(1+x) = \sum_{p=1}^{n}(-1)^{p-1}\frac{x^p}{p} + (-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t}dt}$$

Remarque : cette relation aurait également pu être démontrée en utilisant la formule de Taylor aver reste intégrale.

3) a) Pour $x \in [0,1]$

$$\begin{aligned}\left|(-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t}dt\right| &= \int_0^x \frac{t^n}{1+t}dt \\ &\leqslant \int_0^x t^n dt = \boxed{\frac{x^{n+1}}{n+1}} \underset{n\to\infty}{\to} 0\end{aligned}$$

Par limite par encadrement, $(-1)^n \displaystyle\int_0^x \frac{t^n}{1+t}dt \underset{n\to\infty}{\to} 0$.

Pour $x \in]-1,0]$

$$\begin{aligned}\left|(-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t}dt\right| &= \int_x^0 \frac{(-t)^n}{1+t}dt \\ &\leqslant \frac{1}{1+x}\int_x^0 (-t)^n dt \\ &= \boxed{\frac{(-x)^{n+1}}{(n+1)(1+x)}} \underset{n\to\infty}{\to} 0\end{aligned}$$

Par limite par encadrement, $(-1)^n \displaystyle\int_0^x \frac{t^n}{1+t}dt \underset{n\to\infty}{\to} 0$.

Dans les deux cas,

$$\sum_{p=1}^{n}(-1)^{p-1}\frac{x^p}{p} \underset{n\to\infty}{\to} \ln(1+x) - 0 = \ln(1+x)$$

donc $\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n \text{ converge et sa somme est } \ln(1+x)}$.

b) Appliquant le résultat précédent à $\boxed{x = 1}$ on obtient

$$\boxed{\ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}}$$

Appliquant le résultat précédent à $\boxed{x = -\frac{1}{2}}$ on obtient

$$\ln \frac{1}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

$$-\ln 2 = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\boxed{\ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}}$$

4) La suite $(1/n)$ est réelle positive de limite nulle.

Par la question liminaire, pour tout $n \geqslant 1$,

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \ln 2 \right| \leqslant \frac{1}{n+1}$$

Pour $\boxed{N = 10^p - 1}$,

$$\left| \sum_{k=1}^{N} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \ln 2 \right| \leqslant 10^{-p}$$

5) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

R_n existe car la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n2^n}$ converge d'après la question 3)b).

Pour tout entier $k \geqslant 2$, $0 \leqslant \frac{1}{k2^k} \leqslant \frac{1}{2^k}$.

Donc

$$0 \leqslant R_n \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1^{er}\ terme}{1 - raison} = \frac{(1/2)^{n+1}}{1 - (1/2)} = \boxed{\frac{1}{2^n}}$$

b) Comme $R_N = \ln 2 - \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k2^k}$, pour avoir $|R_N - \ln 2| \leqslant 10^-p$ il suffit d'avoir $2^N \geqslant 10^p$ c'est-à-dire $N \geqslant p\frac{\ln 10}{\ln 2}$.

On peut donc prendre $\boxed{N = \left\lceil p\frac{\ln 10}{\ln 2} \right\rceil}$. Lorsque p est “grand”, cette valeur de N est “bien plus petite” que celle de la question précédente et nécessite donc “beaucoup moins” de calculs.

Problème 2 : Les polynômes de Tchebychev de seconde espèce

Dans ce problème, n est un entier naturel et E désigne l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}_n[X]$.

Pour $(P,Q) \in E^2$, on pose : $(P|Q) = \displaystyle\int_{-1}^{+1} P(t)Q(t)\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$.

1) $(.|.)$ est symétrique par commutativité de la multiplication dans $\mathbb{R}$. Elle est bilinéaire par bilinéarité de la multiplication dans $\mathbb{R}$ et par linéarité de l'intégrale. Elle est positive :

$$\forall P \in E,\ (P|P) = \int_{-1}^{1} P(t)^2\sqrt{1-t^2}dt \geqslant 0$$

par posivité de l'intégrale et car $\forall t \in [-1,1]\ P(t)^2\sqrt{1-t^2} \geqslant 0$.

Montrons que $(.|.)$ est définie. Soit $P \in E$ tel que $(P|P) = 0$. La fonction $t \mapsto P(t)^2\sqrt{1-t^2}$ est nulle sur $[-1,1]$ car continue positive d'intégrale nulle sur l'intervalle non trivial $[-1,1]$. On a donc $\forall t \in]-1,1[,\ P(t) = 0$ car $(\mathbb{R},+,.)$ est un anneau intègre. P a donc une iinfinité de racines donc est le polynôme nul.

Enfin E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.

Donc $(.|.)$ munit E d'une structure d'espace vectoriel euclidien.

2) Pour $p \in \mathbb{N}$, on pose : $I_p = \displaystyle\int_{-1}^{+1} t^p\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$.

   a) $\boxed{\text{Pour } p \text{ impair, } I_p = 0}$ car la fonction $f : t \mapsto t^p\sqrt{1-t^2}dt$ est impaire donc par le changement de variable $t = -u, dt = -du$, on a :

$$I_p = \int_{1}^{-1} f(-u)(-du) = \int_{1}^{-1} -f(u)(-du) = -I_p$$

   b) Par le changement de variable $t = \sin\theta, dt = \cos\theta d\theta$, on a :

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\cos\theta|\cos\theta d\theta \\ &= 2\int_{0}^{\pi/2} \cos^2\theta d\theta \qquad \text{par parité de l'intégrande} \\ &= \int_{0}^{\pi/2} (1+\cos 2\theta)d\theta \\ &= \frac{\pi}{2} + \left[\frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\pi/2} \\ &= \boxed{\frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

   Par le même changement de variable,

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2\theta|\cos\theta|\cos\theta d\theta \\ &= 2\int_{0}^{\pi/2} \sin^2\theta\cos^2\theta d\theta \qquad \text{par parité de l'intégrande} \\ &= \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi/2} \sin^2(2\theta)d\theta \\ &= \frac{1}{4}\int_{0}^{\pi/2} (1-\cos(4\theta))d\theta \\ &= \boxed{\frac{\pi}{8}} \end{aligned}$$

c) Commençons par orthogonaliser.

Posons $P_0 = 1$.

Cherchons a réel tel que $P_1 = X - aP_0$ soit orthogonal à P_0.

$$(P_0|P_1) = (P_0|X) - a||P_0||^2 = \int_{-1}^{1} t\sqrt{1-t^2} - a||P_0||^2 = I_1 - a||P_0||^2 = -a||P_0||^2$$

Il suffit de prendre $a = 0$ c'est-à-dire $P_1 = X$.

Cherchons b et c réels tels que $P_2 = X^2 - bP_1 - cP_0$ soit orthogonal à P_0 et à P_1.

$$(P_0|P_2) = (P_0|X^2) - b(P_0|P_1) - c||P_0||^2 = I_2 - cI_0$$

$$(P_1|P_2) = (P_1|X^2) - b(P_1|P_1) - c(P_1|P_0) = I_3 - bI_2 = -bI_2$$

Il suffit donc de prendre $b = 0$ et $c = I_2/I_0 = 1/4$ c'est-à-dire $P_2 = X^2 - \frac{1}{4}$.

Il ne reste plus qu'à normaliser pour obtenir une base orthonormale (Q_0, Q_1, Q_2) de $\mathbb{R}_2[X]$, en posant :

$$Q_0 = \frac{P_0}{||P_0||} = \frac{1}{\sqrt{I_0}} = \boxed{\sqrt{\frac{2}{\pi}}}$$

$$Q_1 = \frac{P_1}{||P_1||} = \frac{X}{\sqrt{I_2}} = \boxed{2\sqrt{\frac{2}{\pi}}X}$$

$$Q_2 = \frac{P_2}{||P_2||}$$

avec

$$\begin{aligned} ||P_2||^2 &= (P_2|X^2 - cP_0) \\ &= (P_2|X^2) \qquad \text{car } P_2 \perp P_0 \\ &= I_4 - cI_2 \\ &= \frac{\pi}{32} \end{aligned}$$

$$Q_2 = \boxed{4\sqrt{\frac{2}{\pi}}(X^2 - \frac{1}{4})}$$

3) a) T est linéaire par linéarité de la dérivation et bilinéarité de la multiplication dans $\mathbb{R}[X]$.

De plus, pour tout $P \in E$, $d^o(P') \leqslant n-1$ et $d^o(P'') \leqslant n-2$ donc $T(P) \in E$.

Ainsi T est bien un endomorphisme de E.

b) Pour $x \in [-1, +1]$,

$$F'(x) = (1-x^2)^{\frac{3}{2}}P''(x) + \frac{3}{2}(-2x)(1-x^2)^{\frac{1}{2}}P'(x) = \boxed{\sqrt{1-x^2}T(P)(x)}$$

c) Soit $(P, Q) \in E^2$.

$$
\begin{aligned}
(T(P)|Q) &= \int_{-1}^{1} F'(x)Q(x)dx \\
&= \Big[F(x)Q(x)\Big]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} F(x)Q'(x)dx \quad (F \text{ et } Q \text{ étant de classe } \mathcal{C}^1) \\
&= -\int_{-1}^{1} P'(x)\sqrt{1-x^2}Q'(x)dx
\end{aligned}
$$

Le calcul de $(P|T(Q))$ donne le même résultat (invariant par la substitution $P \leftrightarrow Q$).

Donc $\boxed{(T(P)|Q) = (P|T(Q))}$.

4) a) Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in E$.

$$
\begin{aligned}
T(P) &= (1-X^2)\sum_{k=2}^{n} k(k-1)a_k X^{k-2} - 3X\sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1} \\
&= \sum_{k=2}^{n} k(k-1)a_k X^{k-2} - \sum_{k=2}^{n} k(k-1)a_k X^k - 3\sum_{k=1}^{n} k a_k X^k \\
&= \sum_{i=0}^{n-2}(i+2)(i+1)a_{i+2}X^i - \sum_{k=2}^{n} k(k-1)a_k X^k - 3\sum_{k=1}^{n} k a_k X^k \\
&\qquad \text{par le changement d'indice } i = k-2, k = i+2 \\
&= \sum_{i=0}^{n-2}(i+2)(i+1)a_{i+2}X^i - \sum_{k=0}^{n} k(k-1)a_k X^k - 3\sum_{k=0}^{n} k a_k X^k \\
&\qquad \text{par ajout de termes nuls} \\
&= \sum_{k=0}^{n} b_k X^k
\end{aligned}
$$

avec $b_k = \begin{cases} (k+2)(k+1)a_{k+2} - k(k+2)a_k & \text{si } k \leqslant n-2 \\ -k(k+2)a_k & \text{si } k \geqslant n-1 \end{cases}$

$\begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ où

$$
\boxed{M = \begin{pmatrix}
0 & 0 & 2 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\
\vdots & -3 & 0 & 6 & \ddots & & & \vdots \\
\vdots & \ddots & -8 & 0 & 12 & \ddots & & \vdots \\
 & & & & & & & \\
 & & & & & & & 0 \\
 & & & & 0 & -(n-2)n & 0 & (n-1)n \\
 & & & & & 0 & -(n-1)(n+1) & 0 \\
0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & -n(n+2)
\end{pmatrix}}
$$

Cette matrice M est donc, par unicité de l'écriture analytique de T dans la base canonique de E, la matrice de T dans cette base.

b) $M-\lambda I_{n+1}$ est triangulaire supérieure donc son déterminant est le produit de ses coefficients diagonaux :

$$det(M-\lambda I_{n+1}) = \boxed{\prod_{k=0}^{n}\Big(-k(k+2)-\lambda\Big)}$$

Cette matrice n'est pas inversible si et seulement si son déterminant est nul, c'est-à-dire

$$\boxed{\lambda \in \{-k(k+2),\ k \in [\![0,n]\!]\}}.$$

c) Soit $k \in [\![0,n]\!]$, on pose $\lambda_k = -k(k+2)$.

Comme la fonction $k \mapsto k(k+2)$ est strictement croissante donc injective sur $\mathbb{R}_+$, la matrice $M-\lambda_k I_{n+1}$ a exactement un coefficient diagonal nul, celui de sa $(k+1)-$ème ligne.

Les n lignes restantes forment une matrice échelonnée à lignes toutes non nulles, donc de rang n, elles sont donc linéairement indépendantes.

Ainsi le rang de $M-\lambda_k I_{n+1}$ est au moins n. N'étant pas inversible, son rang est au plus n. Donc $\boxed{\text{son rang est } n}$ et, par théorème du rang, son noyau a pour dimension $n+1-n=1$. Donc $\boxed{\text{la dimension du noyau de } T-\lambda_k \mathrm{id}_E \text{ est } 1}$.

d) U_k est non nul car $U_k(1) \neq 0$.

Notons $U_k = a_0 + \ldots + a_d X^d$ avec $d \leqslant n$ et $a_d \neq 0$.

Le coefficient de X^d dans $T(U_k)$ est $-d(d+2)a_d$ d'une part, et, comme $T(U_k) = \lambda_k U_k$, ce coefficient est aussi égal à $\lambda_k a_d$.

Comme a_d est non nul et comme $k \mapsto k(k+2)$ est injective sur $\mathbb{N}$, on a donc $d=k$.

Donc $\boxed{U_k \text{ est de degré } k}$.

e) Pour $i,j \in [\![0,n]\!]$,

$$(T(U_i)|U_j) = \begin{cases} (\lambda_i U_i|U_j) = \lambda_i(U_i|U_j) \text{ d'une part} \\ (U_i|T(U_j)) = \lambda_j(U_i|U_j) \text{ d'autre part} \end{cases}$$

Si $i \neq j$, alors $\lambda_i \neq \lambda_j$ donc $(U_i|U_j)=0$.

Ainsi $(U_0, U_1, \ldots, U_n)$ est une famille orthogonale de vecteurs tous non nuls. Elle est donc libre. Ayant $n+1 = dim(E)$ termes, c'est une $\boxed{\text{base orthogonale de } E}$.

5) Soit $k \in [\![0,n]\!]$. On considère l'équation différentielle (E_k) : $y'' + (k+1)^2 y = 0$.

a) Les solutions à valeurs réelles de (E_k) sont les fonctions de la forme

$$\boxed{x \mapsto a\sin((k+1)x) + b\cos((k+1)x), \quad (a,b) \in \mathbb{R}^2}$$

b) Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$

$$f'(\theta) = -U_k'(\cos\theta)\sin^2\theta + U_k(\cos\theta)\cos\theta$$

$$\begin{aligned}
f''(\theta) &= U_k''(\cos\theta)\sin^3\theta - U_k'(\cos\theta)2\sin\theta\cos\theta - U_k'(\cos\theta)\sin\theta\cos\theta - U_k(\cos\theta)\sin\theta \\
&= \Big(U_k''(\cos\theta)\sin^2\theta - 3U_k'(\cos\theta)\cos\theta - U_k(\cos\theta)\Big)\sin\theta \\
&= \Big(U_k''(\cos\theta)(1-\cos^2\theta) - 3U_k'(\cos\theta)\cos\theta - U_k(\cos\theta)\Big)\sin\theta \\
&= T(U_k)(\cos\theta)\sin\theta \\
&= \lambda_k U_k(\cos\theta)\sin\theta \\
&= \lambda_k f(\theta)
\end{aligned}$$

donc $\boxed{f \text{ est solution sur } \mathbb{R} \text{ de l'équation } (E_k)}$.

c) Ainsi f est de la forme

$$x \mapsto a\sin((k+1)x) + b\cos((k+1)x), \quad (a,b)\in\mathbb{R}^2$$

De plus, $f(0) = U_k(1)\sin(0) = 0$. Comme $f(0) = b$, on a donc $b = 0$ et ainsi $\boxed{f : x \mapsto a\sin(k+1)x}$

d)

$$\forall\theta\in\,]0,\pi[\ ,\ U_k(\cos\theta) = \frac{f(\theta)}{\sin\theta} = a\frac{\sin(k+1)\theta}{\sin\theta}$$

Comme U_k est polynomiale donc continue, et comme cos est continue,

$$U_k(1) = \lim_{\theta\to0^+} U_k(\cos\theta)$$

$$= \lim_{\theta\to0^+} a\frac{\sin(k+1)\theta}{\sin\theta}$$

Or $\frac{\sin(k+1)\theta}{\sin\theta} \sim_{\theta\to0^+} \frac{(k+1)\theta}{\theta}$ donc $\frac{\sin(k+1)\theta}{\sin\theta}$ tend vers $k+1$ lorsque $\theta\to0^+$.
Ainsi $k+1 = a(k+1)$ donc $\boxed{a=1}$.

e) Pour tout $\theta\in]0,\pi[$,

$$U_0(\cos\theta) = 1$$

$$U_1(\cos\theta) = \frac{\sin2\theta}{\sin\theta} = 2\cos\theta$$

$$\begin{aligned}
U_2(\cos\theta) &= \frac{\sin3\theta}{\sin\theta} \\
&= \frac{Im((\cos\theta + i\sin\theta)^3)}{\sin\theta} \\
&= \frac{3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta}{\sin\theta} \\
&= 3\cos^2\theta - \sin^2\theta \\
&= 4\cos^2\theta - 1
\end{aligned}$$

Les polynômes $U_0 - 1$, $U_1 - 2X$ et $U_2 - (4X^2-1)$ ont chacun une infinité de racines (car cos prend une infinité de valeurs sur $]0,\pi[$ puisqu'elle est injective car strictement décroissante sur cet intervalle), donc ces trois polynômes sont nuls.

Ainsi

$$\boxed{U_0 = 1, \quad U_1 = 2X,\ U_2 = 4X^2 - 1}$$

Les polynômes de la question 2)c) sont colinéaires à ces polynômes tous non nuls, donc sont bien orthogonaux deux à deux.