Exercice I

1) On a $a_n = O(1)$ donc $u_n = \dfrac{a_n}{n(n+1)} = O(\frac{1}{n^2})$.
Comme la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente (car $2 > 1$) et à termes positifs, la série $\sum \frac{a_n}{n(n+1)}$ converge absolument, donc converge.

2) a) Remarquons que $\frac{1}{X(X+1)}$ a pour décomposition en éléments simples $\frac{1}{X} - \frac{1}{X+1}$.
Soient $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $0 < p < q$.

$$\sum_{n=p}^{q} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=p}^{q} \frac{1}{n} - \sum_{n=p}^{q} \frac{1}{n+1} = \sum_{n=p}^{q} \frac{1}{n} - \sum_{k=p+1}^{q+1} \frac{1}{k} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q+1}$$

b) On a ainsi $\displaystyle\sum_{n=1}^{q} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1} - \frac{1}{q+1} \underset{n\to\infty}{\to} 1 - 0 = 1$.
Donc la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)}$ converge et sa somme est 1.

3) Soit M un majorant de la suite $(|a_n|)$.
Soit $p \in \mathbb{N}^*$.
Pour tout entier q tel que $q > p$,

$$\left|\sum_{n=p}^{q} \frac{a_n}{n(n+1)}\right| \leqslant \sum_{n=p}^{q} \left|\frac{a_n}{n(n+1)}\right| \leqslant M \sum_{n=p}^{q} \left|\frac{1}{n(n+1)}\right| = M \sum_{n=p}^{q} \frac{1}{n(n+1)} = M\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q+1}\right)$$

Par passage à la limite ($q \to +\infty$) dans les inégalités larges et continuité de la valeur absolue, $|R_p| \leqslant \frac{M}{p}$ et ainsi $|pR_p| \leqslant M$.
Donc la suite (pR_p) est bornée.

4) a) Soit $N \geqslant 1$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{N}\left(k\sum_{n=k}^{N}\frac{a_n}{n(n+1)}\right) &= \sum_{1\leqslant k\leqslant n\leqslant N}\frac{ka_n}{n(n+1)} \\
&= \sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{n}\frac{ka_n}{n(n+1)} \\
&= \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{a_n}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}k\right) \\
&= \sum_{n=1}^{N}\frac{a_n}{n(n+1)}\frac{n(n+1)}{2} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}a_n
\end{aligned}$$

b) Soit $N \geqslant 1$.
Par linéarité de la sommation des séries,

$$\sum_{k=1}^{N}\left(k\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{a_n}{n(n+1)}\right) = \sum_{n=N+1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{N}k\frac{a_n}{n(n+1)} = \sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{N(N+1)}{2}\frac{a_n}{n(n+1)}$$

c) Soit $N \geqslant 1$. En ajoutant membre à membre les deux égalités précédentes, on obtient :

$$(E) \quad \sum_{k=1}^{N} kR_k = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} a_n + \frac{1}{2}\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{N(N+1)}{n(n+1)} a_n$$

Or pour tout $q \geqslant N$,

$$\left|\sum_{n=N+1}^{q} \frac{N(N+1)}{n(n+1)} a_n\right| \leqslant \sum_{n=N+1}^{q} \left|\frac{N(N+1)}{n(n+1)} a_n\right| = \sum_{n=N+1}^{q} \frac{N(N+1)}{n(n+1)} |a_n| \leqslant \sum_{n=N+1}^{q} |a_n|$$

car pour tout $n \geqslant N$, on a $\frac{N(N+1)}{n(n+1)} \leqslant 1$.
Donc par passage aux limites dans les inégalités larges quand $q \to +\infty$ et continuité de la valeur absolue,

$$0 \leqslant \left|\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{N(N+1)}{n(n+1)} a_n\right| \leqslant \sum_{n=N+1}^{+\infty} |a_n|$$

Or la suite des restes de la série convergente $\sum |a_n|$ converge vers 0.
Par le théorème d'encadrement,

$$\left|\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{N(N+1)}{n(n+1)} a_n\right| \underset{N\to\infty}{\to} 0$$

donc

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{N(N+1)}{n(n+1)} a_n \underset{N\to\infty}{\to} 0$$

Passant à la limite quand N tend vers l'infini, dans l'égalité (E),

$$\sum_{k=1}^{N} kR_k \underset{N\to\infty}{\to} \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} a_n + 0$$

ce qui prouve que la série $\sum kR_k$ converge et que sa somme est égale à $\displaystyle\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Exercice II

Posons pour tout naturel $n \geqslant 2$,

$$\begin{aligned}
u_n &= \frac{(-1)^n \sqrt{n}\sin(\frac{1}{\sqrt{n}})}{\sqrt{n} + (-1)^n} \\
&= (-1)^n \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \frac{1}{1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} \\
&= (-1)^n \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)\right)\left(1 - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
&= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \\
&= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - v_n
\end{aligned}$$

avec $v_n \sim \frac{1}{n}$.
Comme $\sum \frac{1}{n}$ est une série divergente à termes positifs, $\sum v_n$ diverge.
De plus $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge par le théorème des séries alternées car c'est une série alternée dont la valeur absolue du terme général décroît et converge vers zéro.
Donc $\boxed{\sum u_n \text{ diverge}}$ car sinon $\sum v_n$ convergerait (car $\forall n \geqslant 2$ $v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - u_n$).

Problème

Partie I

1) a) Pour $t \neq 1$, la formule de la somme des termes d'une suite géométrique nous donne

$$\sum_{k=0}^{p+1} t^k = 1 + t + \cdots + t^p + t^{p+1} = \frac{1 - t^{p+2}}{1-t} = \frac{1}{1-t} - \frac{t^{p+2}}{1-t}.$$

On obtient alors que : $\forall t{\neq}1 \quad \dfrac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + \ldots + t^{p+1} + \dfrac{t^{p+2}}{1-t}$.

Maintenant pour $k \geqslant 2$, la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1-t}$ est continue sur $[0, 1/k]$. On peut donc intégrer les deux termes. Maintenant,

$$\int_0^{1/k} \frac{1}{1-t} dt = [-\ln(1-t)]_0^{1/k} = -\ln\left(1 - \frac{1}{k}\right).$$

De même,

$$\begin{aligned}\int_0^{1/k} 1 + t + t^2 + \ldots + t^{p+1} + \frac{t^{p+2}}{1-t} dt &= \int_0^{1/k} 1 dt + \int_0^{1/k} t dt + \cdots + \int_0^{1/k} t^{p+1} dt + \int_0^{1/k} \frac{t^{p+2}}{1-t} dt \\ &= \frac{1}{k} + \frac{1}{2k^2} + \ldots + \frac{1}{(p+2)k^{p+2}} + \int_0^{1/k} \frac{t^{p+2}}{1-t}\, \mathrm{d}t\end{aligned}$$

On en déduit que : $\forall k{\geqslant}2 \quad -\ln\left(1 - \dfrac{1}{k}\right) = \dfrac{1}{k} + \dfrac{1}{2k^2} + \ldots + \dfrac{1}{(p+2)k^{p+2}} + \displaystyle\int_0^{1/k} \frac{t^{p+2}}{1-t}\, \mathrm{d}t$

b) La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1-t}$ est croissante sur $[0, 1[$, donc

$$\forall t \in [0, 1/k], 0 \leqslant \frac{1}{1-t} \leqslant \frac{1}{1 - 1/k}$$

Maintenant, comme $k \geqslant 2$, $\dfrac{1}{1-1/k} \leqslant \dfrac{1}{1-1/2} = 2$.

On en déduit que $\displaystyle\int_0^{1/k} \frac{t^{p+2}}{1-t} dt \leqslant 2 \int_0^{1/k} t^{p+2} dt = 2\left[\frac{t^{p+3}}{p+3}\right]_0^{1/k} = \frac{2}{(p+3)k^{p+3}}$.

Comme de plus $\displaystyle\int_0^{1/k} \frac{t^{p+2}}{1-t} dt$ est positive, elle s'écrit bien sous la forme $\dfrac{\alpha(k)}{k^{p+3}}$ où $0{\leqslant}\alpha(k){\leqslant}\dfrac{2}{p+3}$.
L'égalité voulue est prouvée.

2) a) On sait que la série $\left(\displaystyle\sum_{k\geqslant 2} \frac{1}{k^{p+2}}\right)$ est une série de Riemann convergente car $p + 2 > 1$. On en déduit par comparaison pour les séries à termes positifs que la série $\left(\displaystyle\sum_{k\geqslant 2} |z_k|\right)$ est convergente.

Cela implique que la série $\left(\displaystyle\sum_{k\geqslant 2} z_k\right)$ est absolument convergente donc convergente.

b) On se fixe $n \geqslant 1$.
La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^{p+2}}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. De ce fait pour tout entier $k \geqslant 2$,

$$\frac{1}{k^{p+2}} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^{p+2}} dt.$$

En sommant pour k allant de $n+1$ à m (où $m \geqslant n+1$) on obtient via la relation de Chasles,

$$\sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k^{p+2}} \leqslant \int_n^m \frac{1}{t^{p+2}} dt = \left[-\frac{1}{(p+1)t^{p+1}} \right]_n^m = \frac{1}{p+1} \left(\frac{1}{n^{p+1}} - \frac{1}{m^{p+1}} \right) \leqslant \frac{1}{(p+1)n^{p+1}}.$$

Ceci étant vrai pour tout $m \geqslant n+1$. Il ne reste plus qu'a faire tendre m vers $+\infty$ pour obtenir :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^{p+2}} \leqslant \frac{1}{(p+1)n^{p+1}}$$

c) On se fixe $n \geqslant 1$.
Soit $m \geqslant n+1$,

$$\left| \sum_{k=n+1}^{m} z_k \right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{m} |z_k| \leqslant M \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k^{p+2}}.$$

Toutes les séries étant convergentes, en faisant tendre m vers $+\infty$ on obtient

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} z_k \right| \leqslant M \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^{p+2}} \leqslant \frac{M}{p+1} \frac{1}{n^{p+1}}.$$

Partie II

3) *Expression de* $\ln(n!)$ *à l'aide d'une suite.*

a) i) Pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$\sum_{k=2}^{n} v_k = \sum_{k=2}^{n} \ln k - \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \ln t dt = \ln \left(\prod_{k=2}^{n} k \right) - \int_1^n \ln t dt = \ln(n!) - \int_1^n \ln t dt$$

On obtient donc : $\forall n \geqslant 2 \quad \ln(n!) = \sum\limits_{k=2}^{n} v_k + \int_1^n \ln t \ \mathrm{d}t.$

ii) On sait que la fonction $t \mapsto \ln t$ admet pour primitive $t \mapsto t \ln t - t$ (sinon faire une intégration par parties). De ce fait

$$\int_1^n \ln t dt = [t \ln t - t]_1^n = n \ln n - n + 1.$$

b) i) Soit $k \geqslant 2$,

$$\int_0^1 (\ln k - \ln(k-u)) du = \int_0^1 \ln k du - \int_0^1 \ln(k-u) du = \ln k - \int_0^1 \ln(k-u) du$$

On procède alors au changement de variables $t = k - u$; $dt = -du$ dans l'intégrale obtenue.

$$\int_0^1 \ln(k-u) du = -\int_k^{k-1} \ln t dt = \int_{k-1}^{k} \ln t dt$$

Finalement, on a bien

$$\int_0^1 (\ln k - \ln(k-u)) du = \ln k - \int_{k-1}^{k} \ln t dt = v_k.$$

ii) Soit $k \geqslant 2$, on procède a une intégration par parties pour calculer $\int_0^1 (\ln k - \ln(k-u)) du$ On pose :

$$\alpha(u) = \ln k - \ln(k-u) \qquad \alpha'(u) = \frac{1}{k-u}$$
$$\beta(u) = u - \frac{1}{2} \qquad \beta'(u) = 1$$

Les fonctions α et β sont de classe $\mathscr{C}^1$.
On obtient donc

$$\begin{aligned} v_k &= \int_0^1 (\ln k - \ln(k-u))du \\ &= [(\ln k - \ln(k-u))(u-1/2)]_0^1 - \int_0^1 \frac{u-1/2}{k-u}du \\ &= \frac{1}{2}\left(\ln k - \ln\left(k-1\right)\right) - \int_0^1 \frac{u-1/2}{k-u}du \end{aligned}$$

c) Soit $n \geqslant 2$. On utilise les résultats précédents :

$$\begin{aligned} \ln(n!) &= \sum_{k=2}^{n} v_k + \int_1^n \ln t dt \text{ (3.a.i)} \\ &= \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{2}\left(\ln k - \ln\left(k-1\right)\right) - w_k\right) + n\ln n - n + 1 \text{ (3.a.ii et 3.b.ii)} \\ &= n\ln n - n + \frac{1}{2}\ln n + 1 - \sum_{k=2}^{n} w_k \text{ (par téléscopage)} \end{aligned}$$

4) *Étude de la suite* $(w_k)_{k\geqslant 2}$.

a) On procède encore à une intégration par parties. On pose :

$$\alpha(u) = \frac{1}{k-u} \qquad \alpha'(u) = \frac{1}{(k-u)^2}$$
$$\beta(u) = \frac{1}{2}(u^2-u) \qquad \beta'(u) = u - 1/2$$

Les fonctions α et β sont de classe $\mathscr{C}^1$.
Cela donne :

$$w_k = \int_0^1 \frac{u-1/2}{k-u}du = \left[\frac{u^2-u}{2(k-u)}\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{u^2-u}{(k-u)^2}du = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{u-u^2}{(k-u)^2}du.$$

b) Comme $u \mapsto \dfrac{1}{(k-u)^2}$ est croissante sur $[0,1]$, pour tout $u \in [0,1]$, $0 \leqslant \dfrac{1}{(k-u)^2} \leqslant \dfrac{1}{(k-1)^2}$. En voyant de plus que $u-u^2$ est positif sur $[0,1]$ on obtient que

$$0 \leqslant w_k = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{u-u^2}{(k-u)^2}du \leqslant \frac{1}{2(k-1)^2}\int_0^1 u-u^2du = \frac{1}{2(k-1)^2}\left[\frac{u^2}{2}-\frac{u^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{12(k-1)^2}.$$

c) La série de terme général w_k est à termes positifs. De plus on a que pour tout $k \geqslant 2$, $w_k \leqslant \dfrac{1}{12(k-1)^2}$. Maintenant, $\dfrac{1}{12(k-1)^2} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{12k^2}$. Par comparaison avec une série de Riemann, on obtient que la série de terme général $\dfrac{1}{12(k-1)^2}$ converge, donc la série de terme général w_k converge aussi.

5) *Évaluation asymptotique de* $\ln(n!)$.
Soit $n \geqslant 1$. On reprend la formule vue en 3.c) :

$$\ln(n!) = n\ln n - n + \frac{1}{2}\ln n + 1 - \sum_{k=2}^{n} w_k.$$

Or, par définition, $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} w_k = \sum_{k=2}^{+\infty} w_k - \sum_{k=n+1}^{+\infty} w_k = 1 - \frac{1}{2}\ln(2\pi) - \varepsilon_n$. On obtient alors que

$$\ln\left(n!\right) = n\ln n - n + \frac{1}{2}\ln n + \frac{1}{2}\ln\left(2\pi\right) + \varepsilon_n.$$

6) *Majoration du reste* ε_n. On sait que pour tout $k \geqslant 2$, $0 \leqslant w_k \leqslant \dfrac{1}{12(k-1)^2}$. Posons donc $z_k = w_{k+1}$.

On a alors que $|z_k| \leqslant \dfrac{M}{k^p+2}$ pour $M = \dfrac{1}{12}$ et $p = 0$.

En appliquant les résultats de 2), on obtient que pour tout $n \geqslant 1$, $\left|\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} z_k\right| \leqslant \dfrac{M}{p+1}\dfrac{1}{n^{p+1}} = \dfrac{1}{12n}$.

Maintenant, pour $n \geqslant 2$, $\left|\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} w_k\right| = \left|\displaystyle\sum_{k=(n-1)+1}^{+\infty} z_k\right| \leqslant \dfrac{1}{12(n-1)}$.

Partie III

7) *Évaluation de* $\varepsilon_{k-1} - \varepsilon_k$.

— Première méthode : On utilise que

$$
\begin{aligned}
w_k = \int_0^1 \frac{u-1/2}{k-u}du &= \int_0^1 -1 + \frac{k-1/2}{k-u}du \\
&= -1 + (k-1/2)\left[-\ln(k-u)\right]_0^1 \\
&= -1 + (k-1/2)\left(-\ln(k) + \ln(k-1)\right) \\
&= -\left(k-\frac{1}{2}\right)\ln\left(1-\frac{1}{k}\right) - 1
\end{aligned}
$$

— Deuxième méthode : On a vu en 5) que

$$\varepsilon_n = \ln(n!) - n\ln n + n - \frac{1}{2}\ln n - \frac{1}{2}\ln(2\pi).$$

On en déduit que

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_{k-1} - \varepsilon_k &= \underbrace{\ln((k-1)!) - \ln(k!)}_{-\ln(k)} - (k-1)\ln(k-1) + k\ln(k) + k - 1 - k - \frac{1}{2}\ln(k-1) + \frac{1}{2}\ln k \\
&= -(k-1)(\ln(k-1) - \ln(k)) - 1 - \frac{1}{2}(\ln(k-1) - \ln(k)) \\
&= -\left(k-\frac{1}{2}\right)\ln\left(1-\frac{1}{k}\right) - 1
\end{aligned}
$$

8) a) On a montré en 1.b) que $-\ln\left(1-\dfrac{1}{k}\right) = \dfrac{1}{k} + \dfrac{1}{2k^2} + \ldots + \dfrac{1}{(p+2)k^{p+2}} + \dfrac{\alpha(k)}{k^{p+3}}$. En utilisant la question précédente on obtient :

$$
\begin{aligned}
w_k &= -\left(k-\frac{1}{2}\right)\ln\left(1-\frac{1}{k}\right) - 1 = \left(k-\frac{1}{2}\right)\left(\sum_{i=1}^{p+2}\frac{1}{ik^i} + \frac{\alpha(k)}{k^{p+3}}\right) - 1 \\
&= \sum_{i=1}^{p+2}\frac{1}{ik^{i-1}} - \sum_{i=1}^{p+2}\frac{1}{2ik^i} - 1 + \frac{1}{k^{p+2}}\frac{(k-1/2)\alpha(k)}{k} \\
&= \sum_{i=0}^{p+1}\frac{1}{(i+1)k^i} - \sum_{i=1}^{p+2}\frac{1}{2ik^i} - 1 + \frac{1}{k^{p+2}}\frac{(k-1/2)\alpha(k)}{k} \\
&= \sum_{i=1}^{p+1}\frac{1}{(i+1)k^i} - \sum_{i=1}^{p+1}\frac{1}{2ik^i} - \frac{1}{2(p+2)k^{p+2}} + \frac{1}{k^{p+2}}\frac{(k-1/2)\alpha(k)}{k} \\
&= \sum_{i=1}^{p+1}\frac{i-1}{2i(i+1)k^i} - \frac{1}{2(p+2)k^{p+2}} + \frac{1}{k^{p+2}}\frac{(k-1/2)\alpha(k)}{k} \\
&= \sum_{i=1}^{p}\frac{b_i}{k^{i+1}} + \frac{\delta(k)}{k^{p+2}}
\end{aligned}
$$

en posant $b_i = \dfrac{i}{2(i+1)(i+2)}$ et $\delta(k) = -\dfrac{1}{2(p+2)} + \alpha(k)\dfrac{k-\frac{1}{2}}{k}$.

b) On sait que $0 \leqslant \alpha(k) \leqslant \dfrac{2}{p+3}$. On en déduit que

$$|\delta(k)| \leqslant \frac{1}{2(p+2)} + \frac{2k-1}{k}\frac{1}{p+3}$$

Maintenant, comme $p \geqslant 0$, $\dfrac{1}{2(p+2)} \leqslant \dfrac{1}{4}$ et $\dfrac{1}{p+3} \leqslant \dfrac{1}{3}$. De plus $\dfrac{2k-1}{k} = 2 - \dfrac{1}{k} \leqslant 2$.
Finalement,

$$|\delta(k)| \leqslant \frac{1}{4} + \frac{2}{3} = \frac{11}{12} \leqslant 1.$$

9) *Une première évaluation de* ε_n.

a) On utilise 1.a) pour $t = 1/k$ et $p = 0$. On a

$$\frac{1}{1-\dfrac{1}{k}} = 1 + \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2\left(1-\dfrac{1}{k}\right)} = 1 + \frac{1}{k} + \frac{\beta(k)}{k^2}$$

en posant $\beta(k) = \dfrac{1}{1-\dfrac{1}{k}} = \dfrac{k}{k-1} = 1 + \dfrac{1}{k-1}$. On en déduit que $\beta(k)$ est décroissant et que pour $k \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant 1 \leqslant \beta(k) \leqslant 2$.

b) i) Pour $k \geqslant 2$,

$$|r_{k-1} - r_k| = \left|\varepsilon_{k-1} - \varepsilon_k - c_1\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right)\right|.$$

Maintenant $\varepsilon_{k-1} - \varepsilon_k = \dfrac{1}{12k^2} + \dfrac{\delta(k)}{k^3}$ et $\dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k} = \dfrac{1}{k}\left(\dfrac{1}{1-1/k} - 1\right) = \dfrac{1}{k}\left(\dfrac{1}{k} + \dfrac{\beta(k)}{k^2}\right)$. On a donc,

$$|r_{k-1} - r_k| = \left|\frac{1}{12k^2} + \frac{\delta(k)}{k^3} - \frac{c_1}{k^2} - \frac{c_1\beta(k)}{k^3}\right|.$$

On prend donc $c_1 = \dfrac{1}{12}$ et on obtient $|r_{k-1} - r_k| = \left|\dfrac{\delta(k)}{k^3} - \dfrac{\beta(k)}{12k^3}\right| \leqslant \dfrac{1}{k^3}\left(1 + \dfrac{2}{12}\right) = \dfrac{7}{6k^3}$.

ii) On pose $z_k = r_{k-1} - r_k$. On vient de voir que $|z_k| \leqslant \dfrac{M}{k^{p+1}}$ pour $M = 7/6$ et $p = 1$. En appliquant 2) on obtient que la série $\sum (r_{k-1} - r_k)$ converge, et que :

$$\forall n \geqslant 1 \quad \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} (r_{k-1} - r_k)\right| \leqslant \frac{M}{p+1}\frac{1}{n^{p+1}} = \frac{7}{12n^2}.$$

c) i) Soit $m \geqslant n+1$, par télescopage, $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{m} (r_{k-1} - r_k) = r_n - r_m$.

Maintenant, $r_m = \varepsilon_m - \dfrac{1}{12m}$ tend vers 0 car (ε_m) tend vers 0 (c'est la suite des restes d'une série convergente). Donc en faisant tendre vers $+\infty$ on obtient que $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} (r_{k-1} - r_k) = r_n$.

ii) Par définition, pour $n \geqslant 1$, $\ln(n!) = n\ln n - n + \dfrac{1}{2}\ln n + \dfrac{1}{2}\ln(2\pi) + \underbrace{\dfrac{1}{12n} + r_n}_{\varepsilon_n}$

Or on a vu que $|r_n| = \left|\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} (r_{k-1} - r_k)\right| \leqslant \dfrac{7}{12n^2}$, donc

$$\forall n \geqslant 1 \quad \ln(n!) = n\ln n - n + \frac{1}{2}\ln n + \frac{1}{2}\ln(2\pi) + \frac{1}{12n} + \frac{\lambda_1(n)}{n^2} \text{ avec } |\lambda_1(n)| \leqslant \frac{7}{12}.$$