Le devoir est composé de deux exercices et d'un problème indépendants les uns des autres.
L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

Exercice I

On considère une suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ de nombres complexes. Dans tout l'exercice la suite est supposée **bornée**.

1. Démontrer que la série de terme général $\dfrac{a_n}{n(n+1)}$ est convergente.

Dans la suite, pour tout entier $k \geqslant 1$, on pose

$$R_k = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{a_n}{n(n+1)}.$$

2. a) Soit p et q des entiers tels que $0 < p < q$. Montrer que

$$\sum_{n=p}^{q} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q+1}.$$

   b) En déduire la nature et la somme de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)}$.

3. Démontrer que la suite $(kR_k)_{k\geqslant 1}$ est bornée.
4. On suppose dans cette question que la série $\sum a_n$ est absolument convergente.
   a) Soit $N \geqslant 1$. Démontrer par interversion de sommations que

$$\sum_{k=1}^{N} \left(k \sum_{n=k}^{N} \frac{a_n}{n(n+1)} \right) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} a_n.$$

   b) Montrer que pour $N \geqslant 1$,

$$\sum_{k=1}^{N} \left(k \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{a_n}{n(n+1)} \right) = \frac{1}{2} \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{N(N+1)a_n}{n(n+1)}.$$

   c) En déduire que la série $\sum kR_k$ converge et déterminer $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} kR_k$ en fonction de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Exercice II

Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n \sqrt{n} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\sqrt{n} + (-1)^n}$.

On pourra commencer par faire un développement asymptotique de $\dfrac{1}{1 + \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}$.

Problème

L'objet du problème est l'étude d'une approximation de $\ln(n!)$ pour les grandes valeurs de l'entier n.
Dans la partie I, on établit des majorations qui seront utilisées dans les parties II et III.
Dans la partie II, on étudie une suite permettant d'obtenir une première approximation de $\ln(n!)$.
Dans la partie III, on établit une évaluation plus précise

Dans tout le problème, p désigne un entier naturel fixé et n un entier variable supérieur ou égal à 1.
Étant donnés deux entiers i et j tels que $0 \leqslant j \leqslant i$, on note $\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} = \dfrac{i!}{j!(i-j)!}$ avec la convention usuelle $0! = 1$.

Partie I

1. a) Justifier que : $\forall t \neq 1 \quad \dfrac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + \ldots + t^{p+1} + \dfrac{t^{p+2}}{1-t}$.

   En déduire : $\forall k \geqslant 2 \quad -\ln\left(1 - \dfrac{1}{k}\right) = \dfrac{1}{k} + \dfrac{1}{2k^2} + \ldots + \dfrac{1}{(p+2)k^{p+2}} + \displaystyle\int_0^{1/k} \dfrac{t^{p+2}}{1-t}\,dt$

   b) En encadrant judicieusement l'intégrale $\displaystyle\int_0^{1/k} \dfrac{t^{p+2}}{1-t}\,dt$, montrer qu'on peut écrire :

   $\forall k \geqslant 2 \quad -\ln\left(1 - \dfrac{1}{k}\right) = \dfrac{1}{k} + \dfrac{1}{2k^2} + \ldots + \dfrac{1}{(p+2)k^{p+2}} + \dfrac{\alpha(k)}{k^{p+3}}$ avec $0 \leqslant \alpha(k) \leqslant \dfrac{2}{p+3}$.

2. On désigne par M un réel positif et on envisage une série réelle $\left(\displaystyle\sum_{k\geqslant 2} z_k\right)$ dont le terme général z_k vérifie pour tout $k \geqslant 2$, $|z_k| \leqslant \dfrac{M}{k^{p+2}}$.

   a) Justifier la convergence de la série $\left(\displaystyle\sum_{k\geqslant 2} z_k\right)$.

   b) En utilisant une comparaison série-intégrale, montrer soigneusement que pour tout $n \geqslant 1$,

   $$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^{p+2}} \leqslant \frac{1}{(p+1)n^{p+1}}$$

   c) En déduire que : $\forall n \geqslant 1 \quad \left|\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} z_k\right| \leqslant \dfrac{M}{p+1}\dfrac{1}{n^{p+1}}$.

Partie II - première approximation de $\ln(n!)$

3. *Expression de* $\ln(n!)$ *à l'aide d'une suite.*

   a) On considère la suite $(v_k)_{k\geqslant 2}$ définie par $v_k = \ln k - \displaystyle\int_{k-1}^{k} \ln t\,dt$.

      i) Prouver que : $\forall n \geqslant 2 \quad \ln(n!) = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} v_k + \int_1^n \ln t\,dt$.

      ii) Calculer $\displaystyle\int_1^n \ln t\,dt$.

   b) i) Établir que : $\forall k \geqslant 2 \quad v_k = \displaystyle\int_0^1 (\ln k - \ln(k-u))\,du$

      ii) En déduire que : $\forall k \geqslant 2 \quad v_k = \dfrac{1}{2}(\ln k - \ln(k-1)) - \displaystyle\int_0^1 \dfrac{u - \frac{1}{2}}{k-u}\,du$. On pourra utiliser une intégration par parties.

   Dans la suite de cette partie on pose $w_k = \displaystyle\int_0^1 \dfrac{u-\frac{1}{2}}{k-u}\,du$ pour $k \geqslant 2 \qquad$ *(1).*

   c) Montrer que : $\forall n \geqslant 2 \quad \ln(n!) = n\ln n - n + \dfrac{1}{2}\ln n + 1 - \displaystyle\sum_{k=2}^{n} w_k$.

4. *Étude de la suite* $(w_k)_{k\geqslant 2}$.

   a) Prouver que $w_k = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 \frac{u-u^2}{(k-u)^2}\,du$ pour $k\geqslant 2$.

   b) En déduire que $0\leqslant w_k\leqslant \dfrac{1}{12(k-1)^2}$.

   c) Montrer que la série $\left(\sum\limits_{k\geqslant 2} w_k\right)$ converge. On admettra que sa somme a pour valeur $1-\dfrac{1}{2}\ln(2\pi)$.

On note désormais, dans toute la suite du problème, $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 1}$ *la suite définie par* $\varepsilon_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} w_k$.

5. *Évaluation asymptotique de* $\ln(n!)$.

   Montrer que : $\forall n\geqslant 1 \quad \ln(n!) = n\ln n - n + \dfrac{1}{2}\ln n + \dfrac{1}{2}\ln(2\pi) + \varepsilon_n$ *(2)*

6. *Majoration du reste* ε_n.

   En utilisant 2) et 4.b), établir que : $0\leqslant\varepsilon_n\leqslant\dfrac{1}{12(n-1)}$ pour $n\geqslant 2$.

Partie III - autre approximation de $\ln(n!)$

Cette partie a pour objet d'étudier plus précisément le comportement asymptotique de la suite $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 1}$.

7. *Évaluation de* $\varepsilon_{k-1}-\varepsilon_k$.

   Montrer que : $\forall k\geqslant 2 \quad \varepsilon_{k-1}-\varepsilon_k = w_k = -\left(k-\dfrac{1}{2}\right)\ln\left(1-\dfrac{1}{k}\right)-1$.

   Pour cela, on pourra utiliser l'expression intégrale de w_k (formule (1) de 3.b)) ou bien la formule (2) de 5).

8. a) En utilisant 1.b), montrer que : $\forall k\geqslant 2 \quad \varepsilon_{k-1}-\varepsilon_k = \displaystyle\sum_{i=1}^{p}\frac{b_i}{k^{i+1}} + \frac{\delta(k)}{k^{p+2}}$ *(3)*

   avec $b_i = \dfrac{i}{2(i+1)(i+2)}$ et $\delta(k) = -\dfrac{1}{2(p+2)} + \alpha(k)\dfrac{k-\frac{1}{2}}{k}$.

   b) En utilisant 1.b), montrer que : $|\delta(k)|\leqslant\dfrac{11}{12}\leqslant 1$.

   Si vous trouvez une meilleure constante, ce n'est pas forcément faux. Continuez cependant avec $\frac{11}{12}$.

9. *Une première évaluation de* ε_n.

   Dans cette question, on fixe $p=1$ de sorte que *(3)* s'écrit $\varepsilon_{k-1}-\varepsilon_k = \dfrac{1}{12k^2}+\dfrac{\delta(k)}{k^3}$ et on pose $r_k = \varepsilon_k - \dfrac{c_1}{k}$, c_1 désignant un nombre réel.

   a) Montrer que : $\forall k\geqslant 2 \quad \dfrac{1}{1-\dfrac{1}{k}} = 1+\dfrac{1}{k}+\dfrac{\beta(k)}{k^2}$ avec $0\leqslant\beta(k)\leqslant 2$.

   b) i) En utilisant 9.a) (ou toute autre méthode), déterminer c_1 de sorte que $|r_{k-1}-r_k|\leqslant\dfrac{7}{6k^3}$ pour $k\geqslant 2$.

   ii) Le réel c_1 étant ainsi choisi, en utilisant 2) établir que la série $\sum(r_{k-1}-r_k)$ converge, et que :

   $$\forall n\geqslant 1 \quad \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}(r_{k-1}-r_k)\right|\leqslant\frac{7}{12n^2}.$$

   c) i) Calculer $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{m}(r_{k-1}-r_k)$ pour $m\geqslant n+1$ et en déduire que $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}(r_{k-1}-r_k) = r_n$.

   ii) En déduire finalement :

   $$\forall n\geqslant 1 \quad \ln(n!) = n\ln n - n + \frac{1}{2}\ln n + \frac{1}{2}\ln(2\pi) + \frac{1}{12n} + \frac{\lambda_1(n)}{n^2} \text{ avec } |\lambda_1(n)|\leqslant\frac{7}{12}.$$