Nom :

Présentation) .... ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5

1)$a_n/(n(n+1)) = O(1/n^2)$ .... ☐0 ☐1

$\sum 1/n^2$ CV et STP, ou CVA .... ☐0 ☐1

donc $\sum \frac{a_n}{n(n+1)}$ CV .... ☐0 ☐1

2)a) $\sum_{n=p}^{q} 1/(n(n+1)) = 1/p - a/(q+1)$ .... ☐0 ☐1

2)b) nature et somme (1) de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ .... ☐0 ☐1

3) $|R_k| \leqslant ||a||_\infty \sum_{n=k}^{\infty} |1/n(n+1)| = ||a||_\infty/k$ donc (kR_k) bornée ..... ☐0 ☐1

justification .... ☐0 ☐1

4)a) $\sum_{k=1}^{N}\left(k\sum_{n=k}^{N}\frac{a_n}{n(n+1)}\right) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} a_n$, interversion .... ☐0 ☐1

et car $\sum_1^n k = n(n+1)/2$ .... ☐0 ☐1

4)b) $\sum_{k=1}^{N}\left(k\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{a_n}{n(n+1)}\right) = \frac{1}{2}\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{N(N+1)a_n}{n(n+1)}$ par linéarité de la sommation .... ☐0 ☐1

4)c) ajouter membre à membre les relations de a) et b) et reconnaître $\sum_{k=1}^{N} kR_k$ à gauche .... ☐0 ☐1

$\left|\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{N(N+1)a_n}{n(n+1)}\right| \leqslant \sum_{n=N+1}^{\infty}|a_n|$ .... ☐0 ☐1

$\sum_{n=N+1}^{\infty}|a_n| \to 0$ qd $N \to \infty$ .... ☐0 ☐1

donc par encadrement $\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{N(N+1)a_n}{n(n+1)} \to 0$ qd $N\to\infty$ .... ☐0 ☐1

$\sum_{k\geqslant 1}$ converge et sa somme est $(1/2)\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ .... ☐0 ☐1

$u_n = (-1)^n \sin(\frac{1}{\sqrt{n}})\frac{1}{1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}$ .... ☐0 ☐1

$=(-1)^n(\frac{1}{\sqrt{n}} + o(1/n))(1 - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + o(1/\sqrt{n}))$ .... ☐0 ☐1

$=(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}} - 1/n + o(1/n)$ .... ☐0 ☐1

donc $\sum u_n$ diverge .... ☐0 ☐1 ☐2

1)a) $\sum_{k=0}^{p+1} t^k = 1 + t + \cdots + t^p + t^{p+1} = \frac{1-t^{p+2}}{1-t} = \frac{1}{1-t} - \frac{t^{p+2}}{1-t}$. .. ☐0 ☐1

$-\ln\left(1-\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{k} + \frac{1}{2k^2} + \cdots + \frac{1}{(p+2)k^{p+2}} + \int_0^{1/k}\frac{t^{p+2}}{1-t}t$ .... ☐0 ☐1

1)b) $0 \leqslant \alpha(k) \leqslant \frac{2}{p+3}$ car $\frac{1}{1-t} \leqslant \frac{1}{1-(1/k)} \leqslant 1-(1/2)$ .... ☐0 ☐1

2)a) $\sum z_k$ CV absolument .... ☐0 ☐1

2)b) $\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^{p+2}} \leqslant \frac{1}{(p+1)n^{p+1}}$ .... ☐0 ☐1

2)c) $\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} z_k\right| \leqslant \frac{M}{p+1}\frac{1}{n^{p+1}}$ .... ☐0 ☐1

3)a)i)$\ln(n!) = \sum_{k=2}^{n} v_k + \int_1^n \ln t t$ .... ☐0 ☐1

3)a)ii) $\int_1^n \ln t dt = n\ln n - n + 1$ .... ☐0 ☐1

3)b)i) $v_k = \int_0^1(\ln(k) - \ln(k-u)du$ .... ☐0 ☐1

3)b)ii) $(\ln k - \ln(k-1)) - \int_0^1\frac{u-\frac{1}{2}}{k-u}u$ .... ☐0 ☐1

3)c) $\ln(n!) = n\ln n - n + \frac{1}{2}\ln n + 1 - \sum_{k=2}^{n} w_k$ .... ☐0 ☐1

4)a)$w_k = \frac{1}{2}\int_0^1\frac{u-u^2}{(k-u)^2}du$ .... ☐0 ☐1

4)b)$0 \leqslant w_k \leqslant \frac{1}{12(k-1)^2}$: $1/(k-u)^2 \leqslant 1/(k-1)^2$ .... ☐0 ☐1

et $\int_0^1(u-u^2)du = 1/6$ .... ☐0 ☐1

4)c) Montrer que $\sum w_k$ CV .... ☐0 ☐1

5) $\ln(n!) = n\ln n - n + \frac{1}{2}\ln n + \frac{1}{2}\ln(2\pi) + \varepsilon_n$ par 3)c) et $\sum_1^n w_k = 1 - \frac{1}{2}\ln 2\pi - \epsilon_n$ .... ☐0 ☐1

6) $0 \leqslant \varepsilon_n \leqslant \frac{1}{12(n-1)}$ par 2) avec $z_k = w_k$, $M = 1/12$ et $p = 0$ .... ☐0 ☐1

7) $\varepsilon_{k-1} - \varepsilon_k = w_k$ .... ☐0 ☐1

$w_k = -(k-\frac{1}{2})\ln(1-\frac{1}{k}) - 1$ .... ☐0 ☐1

8)a) $\varepsilon_{k-1} - \varepsilon_k = \sum_{i=1}^{p}\frac{b_i}{k^{i+1}} + \frac{\delta k}{k^{p+2}}$ où $b_i = \frac{i}{2(i+1)(i+2)}$ et $\delta(k) = -\frac{1}{2(p+2)} + \frac{k-\frac{1}{2}}{k}\alpha(k)$ .... ☐0 ☐1

8)b) $|\delta(k)| \leqslant \frac{11}{12}$ (ou mieux) .... ☐0 ☐1

9)a) $\frac{1}{1-\frac{1}{k}} = 1 + \frac{1}{k} + \frac{\beta(k)}{k^2}$ où $\beta(k) = \frac{k}{k-1}$ .... ☐0 ☐1

$0 \leqslant \beta(k) \leqslant 2$ .... ☐0 ☐1

9)b)i) $|r_{k-1} - r_k| = \left|\frac{1}{12k^2} + \frac{\delta(k)}{k^3} - \frac{c_1}{k^2} - \frac{c_1\beta(k)}{k^3}\right|$ .... ☐0 ☐1

$c_1 = \frac{1}{12}$ .... ☐0 ☐1

$|r_{k-1} - r_k| \leqslant \left|\frac{\delta(k)}{k^3}\right| + \left|\frac{\beta(k)}{12k^3}\right| \leqslant \frac{7}{6k^2}$ .... ☐0 ☐1

9)b)ii) $\sum(r_{k-1} - r_k)$ converge .... ☐0 ☐1

$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}(r_{k-1} - r_k)\right| \leqslant \frac{7}{12n^2}$ par 2.c $M = 7/6$ et $p = 1$ .... ☐0 ☐1

9)c)i) $\sum_{k=n+1}^{m}(r_{k-1} - r_k) = r_n - r_m$ .... ☐0 ☐1

$\sum_{k=n+1}^{\infty}(r_{k-1} - r_k) = r_n$ .... ☐0 ☐1

9)c)ii) $\ln(n!) = n\ln(n) - n + \frac{1}{2}\ln n + \frac{1}{2}\ln(2\pi) + \frac{1}{12n} + \frac{\lambda_1(n)}{n^2}$ où $|\lambda_1(n)| \leqslant \frac{7}{12}$
.... ☐0 ☐1 ☐2 ☐3

.... ☐0 ☐1 ☐2 ☐3
.... ☐0 ☐1 ☐2 ☐3
.... ☐0 ☐1 ☐2 ☐3