Dans ce chapitre, $\mathbf{K}$ désigne $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. En pratique tout restera vrai si $\mathbf{K}$ est un corps en général.

Exercice : Pouvez-vous citer quelques corps ?

1 Espaces vectoriels

1.1 Définitions

Définition (Espace vectoriel)

On appelle espace vectoriel sur $\mathbf{K}$ *ou* $\mathbf{K}$*-espace vectoriel un triplet* $(E, +, .)$ *où* E *est un ensemble,* $+$ *une loi interne de* E *et* $.$ *une loi externe :*

$$+ : \begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & E \\ (u, v) & \longmapsto & u + v \end{array} \quad \text{et} \quad . : \begin{array}{ccc} \mathbf{K} \times E & \longrightarrow & E \\ (\lambda, u) & \longmapsto & \lambda.u \end{array}$$

Vérifiant

- $(E, +)$ *est un groupe abélien*
- *La loi* $.$ *vérifie*
  - $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2, \forall u \in E, (\lambda + \mu).u = \lambda.u + \mu.u$
  - $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2, \forall u \in E, (\lambda \times \mu).u = \lambda.(\mu.u)$
  - $\forall u \in E, 1.u = u$

Remarque : Rappelons que le fait que $(E, +)$ soit un groupe abélien signifie que

—

—

—

—

1.2 Familles de vecteurs

Dans tout ce paragraphe, E désigne un $\mathbf{K}$-espace vectoriel.

Définition (Combinaison linéaire)

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs. On appelle combinaison linéaire des $(u_i)_{i\in I}$ tout vecteur w de la forme

$$w = \sum_{i\in I} \lambda_i u_i$$

où $(\lambda_i)_{i\in I}$ est une famille presque nulle de scalaires; c'est-à-dire qu'il existe un ensemble fini $J \subset I$ tel que si $i \in I \setminus J$, $\lambda_i = 0$.

Notation : On note $\mathbf{K}^{(I)}$ l'ensemble des familles de scalaires presque nulle.
Remarque : Dans le cas où I est un ensemble fini (par exemple $I = [\![1 ; n]\!]$), la condition « presque nulle » est toujours vérifiée et on note juste

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i.$$

Notation : On note $\mathrm{Vect}((u_i)_{i\in I})$ l'ensemble des combinaisons linéaires. C'est le plus petit espace vectoriel qui contient tous les éléments de la famille. C'est l'espace vectoriel engendré par la famille.
Exercice : On considère l'espace vectoriel des suites $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$. On pose $u(i)$ la suite définie par

$$\forall n \in \mathbf{N}, u(i)_n = \delta_{i,n} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Déterminer $\mathrm{Vect}(u(i))_{i\in\mathbf{N}}$

Exercice : Dans $\mathbf{R}^4$ on considère les vecteurs $u_1 = (1, 1, 3, -2)$, $u_2 = (2, 1, 0, 0)$ et $u_3 = (1, 2, 9, -13)$. On pose $F = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3)$. Déterminer la dimension de F et le décrire via un système d'équations.

Définition (Famille libre)

Soit $(u_i)_{i\in I}$ *une famille de vecteurs. Elle est libre si la famille nulle est la seule famille de scalaires presque nulle* $(\lambda_I)_{i\in I}$ *telle que* $\sum_{i\in I} \lambda_i u_i = 0$.

C'est-à-dire :

$$((u_i)_{i\in I} \text{ libre}) \iff (\forall (\lambda_i)_i \in \mathbf{K}^{(I)}, \sum_{i\in I} \lambda_i u_i = 0 \Rightarrow \forall i \in I, \lambda_i = 0)$$

Remarque : Cela revient à demander que toute sous-famille finie est libre.

Exemples :

1. Pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, on pose $u_k = (t \mapsto \sin(t^k))$. Montrons que la famille $(u_k)_{k\in\mathbf{N}^*}$ est libre.

2. Soit $(P_i)_{i\in I}$ une famille de polynômes tels que $\forall (i,j) \in I^2, i \neq j \Rightarrow \deg(P_i) \neq \deg(P_j)$. Montrons que la famille est libre.

Exercice : On pose $f_a : x \mapsto e^{ax}$. Montrer que $(f_a)_{a\in\mathbf{R}}$ est libre.

Exercice : On considère les vecteurs $u_1 = (1, 1, 0, -1)$, $u_2 = (2, 0, 1, 1)$, $u_3 = (-1, 2, 0, 3)$ et $u_4 = (0, 1, 0, 1)$. La famille (u_1, u_2, u_3, u_4) est-elle libre ?

Définition (Famille Génératrice)

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs. On dit qu'elle engendre E si $E = Vect((u_i)_{i\in I})$ c'est-à-dire que tous les vecteurs de E sont des combinaisons linéaires de vecteurs de la famille.

ATTENTION

La notion de famille libre est intrinsèque à la famille, c'est-à-dire que si $(u_i)_{i\in I}$ est une famille d'un sous-espace vectoriel F, on peut travailler dans E ou dans F pour montrer que la famille est libre. Par contre, la notion de famille génératrice ne l'est pas. Une famille peut engendrer F sans engendrer E.

Exemple : La famile $(X^i)_{i\in\mathbf{N}}$ engendre $\mathbf{K}[X]$.

Définition

Une famille de vecteurs $(u_i)_{i\in I}$ est une base de E si c'est une famille libre et génératrice de E.

Théorème

Soit $(u_i)_{i\in I}$ est une base de E. Pour tout vecteur w il existe une unique famille presque nulle $(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbf{K}^{(I)}$ telle que

$$w = \sum_{i\in I} \lambda_i u_i$$

Remarque : Le fait que la famille est génératrice implique qu'il existe (au moins une) famille presque nulle $(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbf{K}^{(I)}$ telle que $w = \sum\limits_{i\in I} \lambda_i u_i$. Le fait qu'elle soit libre implique qu'il existe au plus une famille presque nulle $(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbf{K}^{(I)}$ telle que $w = \sum\limits_{i\in I} \lambda_i u_i$. En effet s'il y en a deux distinctes en faisant la différence on trouve une famille encore presque nulle $(\mu_i)_{i\in I}$ telle que $\sum\limits_{i\in I} \mu_i u_i = 0$.

Définition

Soit $\mathscr{B} = (u_i)_{i\in I}$ une base de E. Pour tout vecteur w, l'unique famille presque nulle $(\lambda_i) \in \mathbf{K}^{(I)}$ telle que

$$\sum_{i\in I} \lambda_i u_i = w$$

s'appelle les coordonnées de w dans la base $\mathscr{B}$.

Remarque : Il a été vu en première année que tout espace vectoriel de dimension finie admettait un base. Il est possible de démontrer que tout espace vectoriel admet des bases (hors programme) cependant dans certains cas on ne peut pas en exhiber. Par exemple $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ ou $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$.

Exercice : Soit $u_1 = (2, 0, 1)$, $u_2 = (-1, 1, 1)$, $u_3 = (1, 3, 5)$ et $u_4 = (1, 2, 3)$. Montrer que (u_1, u_2, u_3, u_4) engendre $\mathbf{R}^3$ et en extraire une base.

ATTENTION

Quand on travaille dans l'espace vectoriel $\mathbf{K}^n$, les vecteurs sont des n-uplets.

$$u = (x_1, \dots, x_n)$$

où $x_1, \dots, x_n$ sont les **composantes** du vecteurs.
Il y a une base dite canonique $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ où pour tout $i \in [\![1 ; n]\!]$,

$$e_i = (0, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ i}}{1}, 0, \dots, 0)$$

Les **coordonnées** du vecteur u dans cette base sont $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ car

$$u = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$$

Mais si on considère les coordonnées de ce vecteur dans une autre base, elles ne seront plus égales aux composantes.

Définition (Rang)

Soit $\mathscr{F} = (u_i)_{i\in I}$. On appelle rang de la famille $\mathscr{F}$ et on note $\mathrm{rg}\,(\mathscr{F})$ *la dimension de l'espace vectoriel engendré par la famille quand il est de dimension finie.*

Proposition

Soit $\mathscr{F}$ une famille de vecteurs de E.

1. Si E est de dimension finie n. Alors $\mathrm{rg}\,(\mathscr{F}) \leqslant n$.
2. Si $\mathscr{F}$ est de cardinal n. Alors $\mathrm{rg}\,(\mathscr{F}) \leqslant n$.

ATTENTION

Ne pas mélanger les notions de rang, cardinal et dimension :

— On peut parler du rang ou du cardinal d'une famille mais pas de sa dimension.

— On peut parler de la dimension (et du cardinal) d'un sous-espace vectoriel mais pas de son rang.

Proposition

Soit $\mathscr{F}$ une famille de vecteurs de E

1. On a $(\mathrm{rg}\,(\mathscr{F}) = \dim(E)) \iff$ (La famille $\mathscr{F}$ engendre E).
2. On a $(\mathrm{rg}\,(\mathscr{F}) = \#\mathscr{F}) \iff$ (La famille $\mathscr{F}$ est libre).
3. On a $(\mathrm{rg}\,(\mathscr{F}) = \#\mathscr{F} = \dim E) \iff$ (La famille $\mathscr{F}$ est une base de E).

1.3 Somme

Définition

Soit $F_1, F_2, \dots, F_n$ des sous-espaces vectoriels, on appelle somme de $F_1, F_2, \dots, F_n$ et on note $F_1 + F_2 + \dots + F_n = \sum_{i=1}^{n} F_i$ le plus petit sous-espace vectoriel contenant $\bigcup_{i=1}^{n} F_i$. On a

$$F_1 + F_2 + \dots + F_n = \{u_1 + \dots + u_n \mid (u_1, \dots, u_n) \in F_1 \times \dots \times F_n\}$$

ATTENTION

Ne pas confondre l'union $\bigcup_{i=1}^{n} F_i$ et la somme $\sum_{i=1}^{n} F_i$. Dans la majorité des cas, une union de sous-espaces vectoriels n'est pas un sous-espace vectoriel.

Exemple : Dans $E = \mathbf{R}^2$. On pose $F_1 = \mathrm{Vect}(u_1)$ et $F_2 = \mathrm{Vect}(u_2)$ où $u_1 = (1, -1)$ et $u_2 = (2, 1)$.

Le vecteur $w = (3, 0) = u_1 + u_2 \in F_1 + F_2$ mais $w \notin F_1 \cup F_2$.

Exemple : Dans $E = \mathbf{R}^3$, on note $F_1 = \mathrm{Vect}(u_1)$ et $F_2 = \mathrm{Vect}(u_2)$ où $u_1 = (1, -1, 0)$ et $u_2 = (1, -2, 1)$. Alors $F_1 + F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$.

Proposition

Soit $F_1, F_2, \dots, F_n$ des sous-espaces vectoriels et $\mathscr{F}_1, \dots, \mathscr{F}_n$ des familles qui engendrent ces espaces alors la concaténée des familles engendre $\sum_{i=1}^{n} F_i$.

Démonstration : Ce résultat reste vrai dans le cas général mais nous ne l'utiliserons que dans le cadre d'espaces vectoriels de dimension finie. Pour alléger les notations nous ferons la démonstration uniquement dans ce cadre.

On note pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $\mathscr{F}_i = (u_{i,1}, \dots, u_{i,p_i})$

□

Définition (Somme directe)

Soit $F_1, F_2, \dots, F_n$ des sous-espaces vectoriels. On dit qu'ils sont en somme directe si

$$\forall (u_1, \dots u_n) \in F_1 \times \cdots \times F_n, u_1 + \cdots + u_n = 0 \Rightarrow u_1 = \cdots = u_n = 0$$

Dans ce cas on note $F_1 \oplus \cdots \oplus F_n$ la somme.

Remarque : Cela revient à dire que tout vecteur w de la somme se décompose de manière unique comme une somme $w = u_1 + \cdots + u_n$ où $u_i \in F_i$.

ATTENTION

Dans le cas de deux espaces vectoriels il y a une caractérisation plus simple :

F_1 et F_2 sont en somme directe si et seulement si

Cette caractérisation ne s'entend pas à plus de trois espaces vectoriels

En particulier des espaces peuvent être deux à deux en somme directe sans être globalement en somme directe.

Exercice : Montrer que $F_1, \cdots, F_n$ sont en somme directe si et seulement si pour tout $i \in [\![1 ; n]\!]$, F_i est en somme directe avec $\displaystyle\sum_{j \neq i} F_j$.

Proposition

Soit $F_1, F_2, \dots, F_n$ des sous-espaces vectoriels en somme directe.
Pour tout i on considère une base $\mathscr{B}_i$ de F_i. La famille $\mathscr{B}$ obtenue en concatenant les familles $\mathscr{B}_i$ est une base de $F = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{n} F_i$.

Démonstration : Ce résultat reste vrai dans le cas général mais nous ne l'utiliserons que dans le cadre d'espaces vectoriels de dimension finie. Pour alléger les notations nous ferons la démonstration uniquement dans ce cadre.

On note pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $\mathscr{B}_i = (u_{i,1}, \dots, u_{i,p_i})$ et $\mathscr{B}$ la famille obtenue en concatenant les familles $\mathscr{B}_i$.

- On a déjà vu que $\mathscr{B}$ était une famille génératrice de F
- Montrons que la famille $\mathscr{B}$ est libre. Soit $(\lambda_{1,1}, \lambda_{1,2}, \dots, \lambda_{1,p_1}, \lambda_{2,1}, \dots, \lambda_{n,p_n})$ une famille de scalaires. On suppose que

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p_i} \lambda_{i,j} u_{ij} = 0$$

  Cela implique que $\sum\limits_{i=1}^{n} w_i = 0$ où, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $w_i = \sum\limits_{j=1}^{p_i} \lambda_{i,j} u_{ij} \in F_i$. Comme la somme est directe, cela implique que pour tout entier i, $w_i = 0$. En utilisant alors que les familles $\mathscr{B}_i$ sont libres, on obtient que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ et tout $j \in \{1, \dots, p_i\}$, $\lambda_{i,j} = 0$.

Finalement, la famille $\mathscr{B}$ est bien une base de F. □

Remarque : A l'inverse, si on se donne une base $(u_i)_{i\in I}$ de E, que l'on partitionne I en $I_1, \dots, I_p$ et l'on note $F_k = \mathsf{Vect}(u_i)_{i\in I_k}$ pour $k \in [\![1\,;\, p]\!]$ alors

$$F_1 \oplus \cdots \oplus F_p = E$$

> **Proposition** (Formule de Grassman)
>
> 1. On a $\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F\cap G)$
> 2. On a $(\dim(F_1+\cdots+F_n) = \dim F_1 + \cdots + \dim F_n) \iff$ (la somme de $F_1, \dots, F_n$ est directe).

2 Applications linéaires

Quelques rappels de première année sur les applications linéaires.

2.1 Rappels sur le rang

> **Définition**
>
> *Soit u une application linéaire. On appelle rang de u et on note $\operatorname{rg} u$ la dimension de $\mathsf{Im}\, u$ quand elle est finie. On a donc*
>
> $$\operatorname{rg} u = \dim(\mathsf{Im}\,(u)).$$

> **Proposition**
>
> Soit u une application linéaire de E dans F et $\mathscr{F}$ une famille génératrice de E.
>
> 1. La famille image $u(\mathscr{F})$ engendre $\mathsf{Im}\,(u)$.
> 2. On a donc $\operatorname{rg}(u) = \operatorname{rg}(u(\mathscr{F}))$ (dans le cas où ce sont des nombres finis).

Remarque : On utilisera ce résultat essentiellement avec $\mathscr{F}$ une base de E.

Exemple : Déterminer le rang de l'application linéaire $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ dont la matrice dans les bases canoniques est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 3 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

Théorème

Soit u une application linéaire de E dans F et S un supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$ dans E.

1. La restriction de u à S est injective : $\operatorname{Ker} u_{|S} = \{0\}$
2. L'application u induit un isomorphisme de S sur $\operatorname{Im} u$:

$$\tilde{u} : \begin{array}{ccc} S & \longrightarrow & \operatorname{Im}(u) \\ x & \longmapsto & u(x) \end{array}$$

Corollaire (Théorème du rang)

Soit u une application linéaire de E dans F. On suppose que E est un espace vectoriel de dimension finie.

1. Le noyau $\operatorname{Ker} u$ admet un supplementaire S
2. On a

Proposition

Soit $u : E \longrightarrow F$ une application linéaire entre deux espaces vectoriels de dimension finie.

1. On a $(\operatorname{rg} u = \dim F) \iff (u$ est $)$
2. On a $(\operatorname{rg} u = \dim E) \iff (u$ est $)$
3. On a $(\operatorname{rg} u = \dim E = \dim F) \iff (u$ est $)$

Proposition

Soit $u : F \longrightarrow G$ et $v : E \longrightarrow F$ deux applications linéaires.

1. On a $\mathrm{rg}\,(u \circ v) \quad \mathrm{rg}\, u$ et $\mathrm{rg}\,(u \circ v) \quad \mathrm{rg}\, v$
2. Si u est un isomorphisme alors $\mathrm{rg}\,(u \circ v) =$.
3. Si v est un isomorphisme alors $\mathrm{rg}\,(u \circ v) =$

Démonstration :

1.

2.

3.

□

2.2 Parties stables

Proposition (Définition d'une application linéaire par son action sur une base)

Soit E et F des espaces vectoriels. Soit $\mathscr{B} = (u_i)_{i\in I}$ une base de E et $(v_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de F indexées par le même ensemble. Il existe une unique application linéaire $f : E \longrightarrow F$ telle que pour tout $i \in I$, $f(u_i) = v_i$. Elle est donnée par

$$f(w) = \sum_{i\in I} \lambda_i v_i \text{ où } w = \sum_{i\in I} \lambda_i u_i.$$

Remarque : Si on suppose que E et F sont de dimension finie. On peut alors définir la matrice de l'application linéaire f. Si on note $\mathscr{C}$ une base de F, on appelle par définition matrice de f dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ et on note $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$ la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des $v_i = f(u_i)$ dans la base $\mathscr{C}$.

L'énoncé précédent, permet d'exprimer f en connaissant sa valeur sur les droites vectorielle Δ_i où, pour tout $\in I$, $\Delta_i = \mathrm{Vect}(u_i)$. On peut généraliser cela.

Proposition

Soit E et F des espaces vectoriels. Soit $E_1, \dots, E_p$ des sous-espaces vectoriels de E tels que

$$E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$$

Soit $u_1, \dots, u_p \in \mathscr{L}(E_1, F) \times \cdots \times \mathscr{L}(E_p, \mathbf{K})$.
Il existe une unique application linéaire $u \in \mathscr{L}(E, F)$ telle que pour tout $i \in [\![1 ; p]\!]$, $u_{|E_i} = u_i$.
Elle est définie par

Remarque : Dans le cas où les espaces vectoriels sont de dimension finie, on peut visualiser ce résultat sur les matrices. En effet si on considère des bases $\mathscr{B}_i$ de E_i et si on note $\mathscr{B}$ la base obtenue en concaténant ces bases.

On obtient alors la matrice $A = \mathsf{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)$ en « collant » les matrices $A_i = \mathsf{Mat}_{\mathscr{B}_i,\mathscr{C}}(u_i)$:

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c} \\ A_1 & \cdots & A_p \\ \\ \end{array} \right).$$

Définition

Soit u une application de E dans E. Soit X une partie de E elle est dite stable par u si

$$u(X) \subset X$$

Remarque : On utilisera cela souvent dans le cas où u est linéaire et X un sous-espace vectoriel mais la terminologie existe dans ce cadre plus général (par exemple intervalle stable dans l'étude des suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$.)

Définition

Soit u une application de E dans E. Soit X une partie stable par u de E, on considère souvent l'application induite

$$\begin{array}{rccc} \check{u} : & X & \longrightarrow & X \\ & x & \longmapsto & u(x) \end{array}$$

ATTENTION

De manière générale, pour $u \in \mathscr{F}(E, E)$ et $X \subset E$, on peut définir $u_{|X} : X \to E$. Dans le cas où la partie est stable on peut aussi se limiter à X pour l'espace d'arrivé.
De ce fait si u est linéaire et X un sous-espace vectoriel, l'application $\check{u}$ est un **endomorphisme** de E.

Exemples :

1. Soit $u : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit $H = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$. Montrons que H est stable par u et calculons la matrice de l'application induite par u dans H dans une base.

2. Recommencer avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ et $H = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid 2x - z = 0\}$.

Proposition

Soit u un endomorphisme de E (de dimension finie). Soit F un sous-espace vectoriel de E. On note $\mathscr{F}$ une base de F et $\mathscr{G}$ une base de G qui est un supplémentaire de F dans E. Soit $\mathscr{B}$ la base obtenue en concaténant $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$,

$$F \text{ est stable par } u \iff \mathsf{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} * & \cdots & * & * & \cdots & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ * & \cdots & * & * & \cdots & * \\ \hline & & & * & \cdots & * \\ & 0 & & \vdots & & \vdots \\ & & & * & \cdots & * \end{array}\right)$$

Démonstration : On note $\mathscr{F} = (f_1, \ldots, f_p)$ et $\mathscr{G} = (g_{p+1}, \ldots, g_n)$.

— $\boxed{\Rightarrow}$:

— $\boxed{\Leftarrow}$:

□

3 Rappels sur les matrices

Faisons quelques rappels sur les matrices

3.1 Changements de bases

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathscr{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ deux bases.

Définition (Matrice de changement de bases)

On appelle matrice de changement de base de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ la matrice des coordonnées des vecteurs de $\mathscr{B}'$ dans la base $\mathscr{B}$.
On la note souvent $P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$. On a donc

$$P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} = Mat_{\mathscr{B}}(e'_1, \dots, e'_n)$$

Théorème (Changement de bases pour les vecteurs)

Soit w un vecteur de E. On note $X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(w)$ et $X' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(w)$ ses coordonnées dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$.
On a

Démonstration :

□

ATTENTION

La matrice de changement de base de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ permet de calculer simplement les coordonnées d'un vecteur dans la base $\mathscr{B}$ à partir de celles du vecteur dans la base $\mathscr{B}'$.

On se donne de plus un autre espace vectoriel F avec des bases $\mathscr{F}$ et $\mathscr{F}'$.

Théorème (Changement de bases pour les applications linéaires)

Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$. On note $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{F}}(u)$ et $A' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{F}'}(u)$. On a alors

$$A' =$$

où P est la matrice du changement de bases de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ et Q cette de $\mathscr{F}$ à $\mathscr{F}'$.

Démonstration : On peut illustrer cette formule par le diagramme suivant.

□

Dans le cas où on regarde des endomorphismes et non plus des applications linéaires générales, on utilise quasi-systématiquement la même base pour l'espace de départ et d'arrivé (afin que la composition des endomorphismes corresponde au produit des matrices). On note alors $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ pour $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(u)$.

Corollaire (Cas des endomorphismes)

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. On note $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ et $A' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(u)$. On a alors

$$A' =$$

où P est la matrice du changement de bases de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$.

3.2 Matrices semblables

Définition (Matrices semblables)

Soit A et A' deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$.
On dit que A et A' sont semblables s'il existe $P \in GL_n(\mathbf{K})$ telle que

$$A' = P^{-1}AP.$$

ATTENTION

Ne pas confondre semblables et équivalentes. Deux matrices sont équivalentes si elles ont le même rang, ce qui revient au fait qu'il existe $(P, Q) \in \mathsf{GL}_n(\mathbf{K})^2$ tel que

$$A' = PAQ$$

Exemple : Donner deux matrices équivalentes qui ne sont pas semblables.

Proposition

La relation « est semblable » est une relation d'équivalence.

Démonstration : Il suffit de démontrer qu'elle est réflexive, symétrique et transitive. □

Remarque : Soit A une matrice, l'ensemble des matrices semblables à A forment ce que l'on appelle sa classe de similitude.

Proposition

Soit E un espace vectoriel de dimension n et $\mathscr{B}$ une base de E. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$, on note $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$. Soit $A' \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, elle est semblable à A si et seulement s'il existe une base $\mathscr{B}'$ de E telle que $A' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(u)$.

Démonstration :

Note

Cela signifie que si u est un endomorphisme de E et si A est **une** matrice de u dans **une** base $\mathscr{B}$ de E, la classe de similitude de A est l'ensemble des matrices A' telles qu'il existe une base $\mathscr{B}'$ vérifiant

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(u) = A'$$

La suite du cours consiste à expliquer comment choisir la matrice « la plus simple ».

3.3 Trace

Définition (Trace)

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$*, on appelle trace de* A *et on note* $\mathrm{tr}\,(A)$ *la somme des coefficients diagonaux.*

$$\mathrm{tr}\,(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Proposition (Propriétés de la trace)

1. La trace est une forme linéaire.
2. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, $\mathrm{tr}\,(A^T) = \mathrm{tr}\,(A)$
3. Soit $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})^2$, $\mathrm{tr}\,(AB) = \mathrm{tr}\,(BA)$

Démonstration :

1. Evident
2. Evident
3.

□

Exercice : Calculer pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, $\mathrm{tr}\,(A^T A)$.

ATTENTION

La trace d'un produit n'est pas (en général) le produit des traces.

Corollaire

Soit A et B deux matrices semblables, $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(B)$.

Démonstration : Par définition si A et B sont semblables, il existe $P \in \mathsf{GL}_n(\mathbf{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$. On en tire que

$$\operatorname{tr}(B) = \operatorname{tr}(P^{-1}AP) = \operatorname{tr}(APP^{-1}) = \operatorname{tr}(A).$$

□

Exercices :

1. Trouver deux matrices A et B ayant la même trace mais n'étant pas semblables.
2. Deux matrices équivalentes ont-elles la même trace ?

Proposition - définition

Soit u un endomorphisme de E (espace vectoriel de dimension finie). Pour toute base $\mathscr{B}$ la trace de $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ est la même. On l'appelle la trace de u et on la note $\operatorname{tr}(u)$.

3.4 Calcul par blocs

Reprenons le calcul par blocs vu en première année.

Théorème

Soit $(A_{ij})_{(i,j)\in[\![1\,;r]\!]\times[\![1\,;s]\!]}$ où $A_{ij} \in \mathscr{M}_{n_i p_j}(\mathbf{K})$ et $(B_{jk})_{(j,k)\in[\![1\,;s]\!]\times[\![1\,;t]\!]}$ où $B_{jk} \in \mathscr{M}_{p_j q_k}(\mathbf{K})$. On note

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c} A_{11} & \cdots & A_{1s} \\ \hline \vdots & & \vdots \\ \hline A_{r1} & \cdots & A_{rs} \end{array}\right) \text{ et } B = \left(\begin{array}{c|c|c} B_{11} & \cdots & B_{1t} \\ \hline \vdots & & \vdots \\ \hline B_{s1} & \cdots & B_{st} \end{array}\right)$$

Le produit AB est donné par

$$AB = \left(\begin{array}{c|c|c} \sum_{j=1}^{s} A_{1j}B_{j1} & \cdots & \sum_{j=1}^{s} A_{1j}B_{js} \\ \hline \vdots & & \vdots \\ \hline \sum_{j=1}^{s} A_{rj}B_{j1} & \cdots & \sum_{j=1}^{s} A_{rj}B_{js} \end{array}\right)$$

Démonstration : Il « suffit » de faire le calcul. □

3.4.1 Interprétation géométrique

Si on se donne E et F des espaces vectoriels et que l'on a des décompositions en somme directes

$$E = \bigoplus_{j=1}^{s} E_j \text{ et } F = \bigoplus_{i=1}^{r} F_i$$

On se donne alors $\mathscr{E}_1, \ldots \mathscr{E}_s$ des bases de $E_1, \ldots, E_s$ et $\mathscr{F}_1, \ldots \mathscr{F}_r$ des bases de $F_1, \ldots, F_r$. On note $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ les bases de E et F obtenues en concaténant les bases ci-dessus. Dans ce cas pour $u \in \mathscr{L}(E, F)$, si on note

$$A = \mathsf{Mat}_{\mathscr{E},\mathscr{F}}(u) = \left(\begin{array}{c|c|c} A_{11} & \cdots & A_{1s} \\ \hline \vdots & & \vdots \\ \hline A_{r1} & \cdots & A_{rs} \end{array}\right).$$

On peut alors considérer π_{i_0} la projection sur F_{i_0} parallèlement à $\bigoplus_{\substack{1\leqslant i\leqslant r \\ i\neq i_0}} F_i$. On peut alors voir A_{ij} comme la matrice (dans les bases $\mathscr{E}_i$ et $\mathscr{F}_j$) de la restriction à E_j de $\pi_i \circ u$.

Dans le cas des endomorphismes on prend la même décomposition pour l'espace de départ et d'arrivé

$$E = \bigoplus_{j=1}^{s} E_j$$

La matrice de u dans la base $\mathscr{E}$ sera dite « diagonale par blocs » si pour tout i, E_i est stable par u. Dans ce cas on obtient

$$\left(\begin{array}{c|ccc|c}
A_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\hline
0 & \ddots & & & 0 \\
\vdots & & \ddots & & \vdots \\
0 & & & \ddots & 0 \\
\hline
0 & 0 & \cdots & 0 & A_{ss}
\end{array}\right).$$