

Table des matières

1	Séries numériques	5
1	Généralités	6
1.1	Définitions	6
1.2	Propriétés	7
1.3	Lien suite-série	8
1.4	Divergence grossière	9
2	Séries de référence	10
2.1	Séries géométriques	10
2.2	Séries de Riemann	10
2.3	Série exponentielle	11
2.4	Exemples de calculs de sommes	11
3	Séries à termes positifs	13
3.1	Généralités	13
3.2	Théorème de comparaison par inégalités pour les séries à termes positifs	14
3.3	Rappels sur les relations de comparaison	15
3.4	Théorème de comparaison par équivalents pour les séries à termes positifs	17
3.5	Règle de D'Alembert	18
4	Séries absolument convergentes	18
4.1	Définition	19
4.2	Applications aux séries dont le terme général n'a pas nécessairement un signe constant	19
5	Comparaison séries - intégrales	20
5.1	Généralités	20
5.2	Exemples et applications	21
6	Séries alternées	24
6.1	Généralités	24
6.2	Etude du reste et de la somme	25
7	Sommation des relations de comparaison pour les séries à termes positifs	25
7.1	Sommation des relations de comparaison pour les séries à termes positifs	25
7.2	Applications classiques	28
2	Convexité	31
1	Partie convexe d'un R-espace vectoriel	31
1.1	Barycentres	31
1.2	Partie convexe	33
2	Fonctions convexes	34
2.1	Définition	34
2.2	Caractérisation en terme de pentes	36
2.3	Inégalité de convexité	37
3	Fonctions convexes dérivables	38
3.1	Caractérisation	38
3.2	Position relative par rapport aux tangentes	38

4	Quelques applications	39
4.1	Obtention d'inégalités	39
4.2	Inégalité de Holder (à faire en TD)	40
3	Intégration	41
1	Intégrale généralisée sur un intervalle de la forme $[a, b[$	41
1.1	Rappels et définition	42
1.2	Propriétés	46
1.3	Intégrabilité sur un intervalle de la forme $[a, b[$	47
1.4	Comparaison et fonctions de référence	49
2	Intégration sur un intervalle quelconque	52
2.1	Intervalle de la forme $]a, b]$	52
2.2	Intégration sur un intervalle ouvert	54
2.3	Propriétés de l'intégrale	55
2.4	Méthodes de calculs	57
2.5	Intégration des relations de comparaisons	60
3	Les théorèmes de Lebesgue	62
3.1	Limite (simple) d'une suite de fonctions et d'une série de fonctions	62
3.2	Interversion de \lim et \int	63
3.3	Théorème de convergence dominée	64
3.4	Théorème de convergence dominée - Cas continu	65
3.5	Intégration terme à terme d'une somme d'une série de fonctions	66
4	Algèbre linéaire et éléments propres	68
1	Rappels	69
1.1	Définitions	69
1.2	Familles de vecteurs	69
1.3	Somme	72
2	Applications linéaires	73
2.1	Rappels sur le rang	73
2.2	Parties stables	74
3	Rappels sur les matrices	76
3.1	Changements de bases	76
3.2	Matrices semblables	77
3.3	Trace	78
3.4	Calcul par blocs	78
4	Algèbres	79
4.1	Définition	80
4.2	Sous-algèbre et morphismes d'algèbre	80
5	Éléments propres d'un endomorphisme	82
5.1	Définition	82
5.2	Sous-espaces propres	84
6	Éléments propres d'une matrice	85
6.1	Définition	85
6.2	Endomorphismes et matrices diagonalisables	87
7	Formes linéaires et hyperplans	89
7.1	Changement de bases	89
7.2	Bases duales et formes coordonnées	90
7.3	Formes linéaires et hyperplans	91
5	Suites et séries de fonctions	93
1	Suites de fonctions	93
1.1	Convergence simple et convergence uniforme	93
1.2	Norme infinie	96

1.3	Quelques méthodes	98
2	Continuité et double limite	99
2.1	Continuité	99
2.2	Théorème de la double limite	101
3	Intégration et dérivation	103
3.1	Intégration	103
3.2	Dérivation	105
4	Séries de fonctions	106
4.1	Convergence	107
4.2	Continuité, intégration et dérivation	109
4.3	Exemple d'étude d'une fonction définie par une série	113
5	Approximation uniforme	114
5.1	Fonctions en escalier	114
6	Polynôme caractéristique et réduction	116
1	Polynôme caractéristique	116
1.1	Polynôme caractéristique d'une matrice carrée	116
1.2	Polynôme caractéristique d'un endomorphisme	118
1.3	Multiplicités	119
1.4	Polynôme caractéristique d'une matrice triangulaire	120
1.5	Polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit	121
2	Matrices et endomorphismes trigonalisables	123
2.1	Définitions	123
2.2	Critère de trigonalisabilité	123
3	Matrices et endomorphismes nilpotents	127
3.1	Définitions	127
3.2	Critère de nilpotence	128
7	Polynôme minimal et réduction	130
1	Polynômes d'endomorphismes et de matrices	131
1.1	Polynômes de matrices	131
1.2	Polynômes d'endomorphismes	132
2	Compléments d'algèbre	133
2.1	Idéaux d'un anneau commutatif	133
2.2	Plus grand commun diviseur	136
2.3	Algorithme d'Euclide	139
2.4	Généralisation à n polynômes	140
3	Polynômes annulateurs	140
3.1	Définitions	140
3.2	Polynôme minimal	141
3.3	Polynômes annulateurs et valeurs propres	144
3.4	Théorème de Cayley-Hamilton	145
3.5	Calcul de puissances	145
4	Critère de diagonalisabilité	146
4.1	Décomposition des noyaux	146
4.2	Polynômes annulateurs et diagonalisabilité	149
4.3	Endomorphismes annulés par un polynôme scindé	151
5	Compléments et applications	152
5.1	Influence du corps de base	152
5.2	Calculs de puissances	152
5.3	Commutant	152
5.4	Décomposition de Dunford	153
5.5	Racines carrées	154
5.6	Sous-espaces stables	154

8	Espaces vectoriels normés - 1	156
1	Normes	156
1.1	Définition	156
1.2	Exemples de normes	157
1.3	Distance associée à une norme	164
1.4	Boules	165
1.5	Parties, suites et fonctions bornées	166
1.6	Normes équivalentes	167
1.7	Cas des algèbres	168
2	Exemple de normes équivalentes	169
2.1	Normes usuelles	169
3	Suites à valeurs dans un espace vectoriel normé	171
3.1	Convergence	171
3.2	Propriétés	175
3.3	Suites extraites et valeurs d'adhérence	176
4	Applications linéaires lipschitziennes	178
4.1	Définitions	178
9	Séries entières	181
1	Généralités et rayon de convergence	181
1.1	Définition	181
1.2	Rayon de convergence	182
1.3	Utilisation de la règle de D'Alembert	184
1.4	Théorèmes de comparaison	185
1.5	Opérations	186
2	Étude de la somme d'une série entière	187
2.1	Convergence normale et continuité	188
2.2	Primitivation	188
2.3	Dérivation	189
3	Fonctions développables en séries entières	191
3.1	Définitions	191
3.2	Développements en série entière des fonctions usuelles	193
4	Utilisation des séries entières dans l'étude des équations différentielles	193
4.1	Rappel du cours de première année - Généralités	193
4.2	Rappel du cours de première année - premier ordre	194
4.3	Rappel du cours de première année - Deuxième ordre	195
4.4	Utilisation des séries entières	197
10	Familles sommables	200
1	Ensembles dénombrables	200
1.1	Définitions	200
1.2	Propriétés et exemples	202
2	Familles sommables	204
2.1	Familles sommables de réels positifs	204
2.2	Familles sommables de nombres complexes	207
2.3	Applications aux « séries doubles »	210
2.4	Produit de Cauchy	211
11	Probabilités	214
1	Espaces probabilisés	214
1.1	Tribus	214
1.2	Probabilités	215
2	Propriétés élémentaires des probabilités	217
2.1	Continuité	217
2.2	Événements négligeables, presque sûrs	219

3	Indépendance et probabilités conditionnelles	220
3.1	Probabilités conditionnelles	220
3.2	Événements indépendants	222
4	Variabes aléatoires discrètes	223
4.1	Généralités	223
4.2	Couples de variables aléatoires et vecteurs aléatoires	225
4.3	Couples et familles de variables aléatoires indépendantes	228
5	Lois usuelles	230
5.1	Loi uniforme	230
5.2	Loi de Bernoulli et loi binomiale	230
5.3	Loi géométrique	231
5.4	La loi de Poisson	232
6	Espérance d'une variable aléatoire discrète	233
6.1	Cas des variables positives	233
6.2	Cas des variables réelles	237
6.3	Propriétés de l'espérance	238
7	Variance et écart type	240
7.1	Définitions	240
7.2	Lois usuelles	242
7.3	Covariance	244
8	Fonctions génératrices	247
8.1	Généralités	247
8.2	Exemples	249
12	Espaces vectoriels normés - 2	251
1	Topologie d'un espace vectoriel normé	252
1.1	Ouverts	252
1.2	Voisinages	253
1.3	Fermés	254
1.4	Points intérieurs et intérieur	255
1.5	Points adhérents et adhérence	257
1.6	Caractérisation séquentielle des points adhérents et des fermés	258
1.7	Frontière	259
1.8	Densité	259
1.9	Invariance par changement de normes équivalentes	260
1.10	Topologie induite	261
2	Étude locale d'une application	263
2.1	Limite en un point adhérent	263
2.2	Composition	265
2.3	Opérations sur les limites	266
2.4	Continuité	266
2.5	Caractérisation du caractère continu par les images réciproques	269
2.6	Applications uniformément continues	269
2.7	Applications lipschitziennes	270
2.8	Applications linéaires continues	272
3	Parties compactes d'un espace vectoriel normé	273
3.1	Définition	273
3.2	Applications continues sur une partie compacte	275
4	Espaces vectoriels de dimension finie	276
4.1	Équivalence des normes	276
4.2	Topologie des espaces vectoriels de dimension finie	278
4.3	Applications continues	278
5	Séries à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie	279
5.1	Généralités	279
5.2	Série géométrique de matrices	280
5.3	Série exponentielle de matrices	281

6	Parties connexes par arcs	284
6.1	Motivation	284
6.2	Définition	284
6.3	Image d'une partie connexe par arcs par une application continue	286
13	Espaces préhilbertiens réels	287
1	Rappels	287
2	Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel de dimension finie	288
2.1	Définition	289
2.2	Propriétés	290
3	Suites totales	292
3.1	Définitions	292
3.2	Exemples	293
4	Isométries vectorielles d'un espace euclidien	296
4.1	Endomorphismes orthogonaux - Rappels	296
4.2	Matrices orthogonales	298
4.3	Groupe spécial orthogonal et orientation	299
4.4	Endomorphismes orthogonaux du plan euclidien	300
4.5	Réduction des isométries	302
4.6	Automorphismes orthogonaux de l'espace	304
5	Endomorphismes symétriques d'un espace euclidien	305
5.1	Définition	306
5.2	Matrice d'un endomorphisme symétrique	307
5.3	Théorème spectral	307
14	Fonctions à valeurs vectorielles - Arcs paramétrés	310
1	Dérivabilité	311
1.1	Dérivabilité en un point	311
1.2	Opérations	312
1.3	Dérivées successives	315
2	Intégration sur un segment	315
2.1	Définitions	315
2.2	Propriétés de l'intégrale	317
3	Intégrale fonction de sa borne supérieure	318
3.1	Théorème fondamental de l'analyse	318
3.2	Inégalités des accroissements finis	319
4	Formules de Taylor	320
4.1	Formule de Taylor avec reste intégral	320
4.2	Formule de Taylor-Young	320
5	Suites et séries de fonctions à valeurs vectorielles	321
5.1	Généralités	321
5.2	Continuité et théorème de la double limite	323
5.3	Intégration et dérivation	325
6	Arcs paramétrés	326
6.1	Généralités	326
6.2	Un exemple	328
15	Equations différentielles linéaires	329
1	Généralités	330
1.1	Définitions	330
1.2	Structure des solutions	331
1.3	Problème de Cauchy	331
1.4	Équation différentielle scalaire d'ordre n	332

2	Théorème de Cauchy linéaire	334
2.1	Théorème de Cauchy linéaire	334
2.2	Applications du théorème de Cauchy linéaire	335
2.3	Exemples d'équations différentielles non résolubles	336
3	Équations différentielles à coefficients constants	338
3.1	Rappels sur l'exponentielle des matrices et endomorphismes	338
3.2	Généralités	339
3.3	Exemples de calculs	340
4	Résolution d'une équation différentielle linéaire vectorielle d'ordre 1	342
4.1	L'équation homogène	342
4.2	Méthode de la variation de la constante	344
5	Equations différentielles scalaires du second ordre	346
5.1	Variation de la constante	346
5.2	Wronskien d'une équation scalaire du second ordre homogène	347
5.3	Résolutions d'une équation scalaire du second ordre en connaissant une solution	348
16	Intégrales à paramètres	350
1	Théorèmes généraux	350
1.1	Limite et continuité	350
1.2	Dérivabilité	353
2	Exemples	356
17	Calcul différentiel	357
1	Différentielle et dérivées partielles	358
1.1	Dérivées selon un vecteur	358
1.2	Différentielle	359
1.3	Expression dans une base	361
1.4	Matrice jacobienne	362
2	Opérations sur les applications différentiables	364
2.1	Combinaison linéaire et fonctions bilinéaires	364
2.2	Composition et règle de la chaîne	365
2.3	Dérivée le long d'un arc	368
3	Cas des applications numériques	369
3.1	Gradient	369
3.2	Point critique et extremum	372
4	Applications de classe \mathcal{C}^1	376
4.1	Définitions	376
4.2	Théorème fondamental de l'analyse	377
5	Applications de classe \mathcal{C}^1	378
5.1	Définitions	378
5.2	Théorème fondamental de l'analyse	380
6	Fonctions de classe \mathcal{C}^k	381
6.1	Définitions	381
6.2	Opérations algébriques sur les fonctions de classe \mathcal{C}^k	383
7	Exemple d'équations aux dérivées partielles	384
7.1	Premier ordre	384
7.2	Second ordre	385
8	Vecteur tangent à une partie	386
8.1	Généralités	386
8.2	Cas des surfaces	388

18	Algèbre	390
1	Groupes	390
1.1	Généralités	390
1.2	Sous-groupe	391
1.3	Morphismes de groupes	394
2	Groupes monogènes	396
2.1	Groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$	396
2.2	Générateurs, groupes monogènes et groupes cycliques	399
3	Ordre d'un élément	401
3.1	Définition	401
3.2	Théorème de Lagrange	402
4	Anneaux	405
4.1	Définitions	405
4.2	Morphisme d'anneaux	407
4.3	Anneaux intègres et corps	408
5	L'anneau $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$	409
5.1	Définition	409
5.2	Théorème Chinois	413
5.3	Indicatrice d'Euler	416
6	Factorisation des polynômes de $\mathbb{K}[X]$	418
6.1	Polynômes irréductibles	418
6.2	Décomposition en produit de facteurs irréductibles	419