Semaine 02 - du 20 au 24 septembre

Fonctions convexes & intégration

Fonctions convexes

Barycentres

Une fonction f définie sur I est convexe si et seulement si :

$$\forall (a,b) \in I^2 \quad \forall t \in [0,1] \quad f(ta+(1-t)b) \leqslant tf(a)+(1-t)f(b)$$

La fonction f est convexe si et seulement si pour tout a dans I, la fonction φ_a définie sur $I \setminus \{a\}$ par $\varphi_a : x \mapsto \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est croissante.

Une fonction f dérivable sur I est convexe si et seulement si f' est croissante.

Si f est dérivable et convexe alors $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de toutes ses tangentes :

$$\forall a \in I, \forall x \in I, f(x) \geqslant f(a)+(x-a)f'(a).$$

Inégalité de convexité : $f\left(\sum\limits_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leqslant \sum\limits_{i=1}^n \lambda_i f(x_i) \qquad (\forall i \quad \lambda_i \geqslant 0 \text{ et } \sum\limits_{i=1}^n \lambda_i = 1).$

Intégrales convergentes

Fonctions continues par morceaux sur un intervalle

Définition d'intégrale convergente pour des fonctions continues par morceaux sur des intervalles de la forme $[a,b[$, $]a,b]$ et $]a,b[$; propriétés

Théorème de comparaison par inégalité et par équivalence pour les fonctions positives

Fonctions intégrables

Une fonction f continue par morceaux est intégrable sur I si $\displaystyle\int_I |f|$ converge.

Si f est intégrable sur I alors $\displaystyle\int_I f$ converge.

Fonctions de références :

- $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-at}dt$ converge pour $a>0$.
- $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ converge ssi $\alpha > 1$.
- $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dt}{t^\alpha}$ converge ssi $\alpha < 1$.

Je n'ai pas eu le temps de traiter les intégrations par parties et les changement de variables ; cela sera fait lundi matin ou mercredi matin. Vous pouvez quand même interroger sur ces notions dans le cadre du programme de première année.