

## Partie I :

1. (a) Pour tout entier
- $n \geq 2$
- , par télescopage,

$$\sum_{k=2}^n k \ln(k) - (k-1) \ln(k-1) = n \ln n - 1 \ln 1 = n \ln n$$

- (b) Pour
- $n \geq 2$
- ,

$$\begin{aligned} \ln(n!) - n \ln n &= \sum_{k=2}^n \ln k - \sum_{k=2}^n k \ln(k) - (k-1) \ln(k-1) \\ &= \sum_{k=2}^n (k-1) \ln(k-1) - (k-1) \ln(k) \\ &= \sum_{k=2}^n (k-1) \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) \end{aligned}$$

2. Pour
- $k \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} (k-1) \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) &= (k-1) \left(-\frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2} - \frac{1}{3k^3} + o\left(\frac{1}{k^3}\right)\right) \\ &= -1 - \frac{1}{2k} - \frac{1}{3k^2} + \frac{1}{k} + \frac{1}{2k^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right) \\ &= -1 + \frac{1}{2k} + \frac{1}{6k^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right) \end{aligned}$$

3. On pose
- $\alpha_k = (k-1) \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) + 1 - \frac{1}{2k}$
- de sorte que
- $\alpha_k \sim \frac{1}{6k^2}$
- et que

$$(k-1) \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) = -1 + \frac{1}{2k} + \alpha_k$$

On en déduit que

$$\ln(n!) - n \ln n = \sum_{k=2}^n -1 + \frac{1}{2k} + \alpha_k = -(n-1) + \sum_{k=2}^n \frac{1}{2k} + \sum_{k=2}^n \alpha_k$$

Donc, pour  $n \geq 2$ 

$$\ln(n!) = n \ln n - n + 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{2k} + \sum_{k=2}^n \alpha_k$$

4. (a) Comme
- $(\alpha_k) \sim \frac{1}{6k^2}$
- et que la série de Riemann
- $\sum \frac{1}{k^2}$
- est convergente, par comparaison pour les séries à termes positifs, la série
- $\sum \alpha_k$
- converge. Si on note
- $S$
- sa somme on a donc pour
- $n \geq 2$
- ,
- 
- $$\sum_{k=2}^n \alpha_k = S + o(1).$$

En utilisant la propriété donnée dans la question,

$$\ln(n!) = n \ln n - n + 1 + \frac{1}{2}(\ln n + \gamma - 1) + S + o(1)$$

On en déduit que

$$\ln(n!) - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln(n) + n = \frac{\gamma + 1}{2} + S + o(1)$$

et donc, en posant  $C = \frac{\gamma+1}{2} + S$ ,

$$\left(\ln(n!) - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln(n) + n\right) \longrightarrow C$$

(b) En prenant l'exponentielle et en notant  $K = \exp(C)$ , on a

$$\frac{n!}{n^n e^{-n} \sqrt{n}} = \exp\left(\ln(n!) - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln(n) + n\right) \longrightarrow K$$

et donc

$$n! \sim K n^n e^{-n} \sqrt{n}$$

### Partie II :

1. (a) On a  $I_0 = \frac{\pi}{2}$  et  $I_1 = [-\cos t]_0^{\pi/2} = 1$ .

(b) Pour  $n \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} I_{n+2} &= \int_0^{\pi/2} \sin t \times (\sin t)^{n+1} dt \\ &= [-\cos t \times (\sin t)^{n+1}]_0^{\pi/2} + (n+1) \int_0^{\pi/2} \cos^2 t \times (\sin t)^n dt \\ &= (n+1) \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2 t) \times (\sin t)^n dt \\ &= (n+1)I_n - (n+1)I_{n+2} \end{aligned}$$

On en déduit  $(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$  puis que  $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}I_n$ .

(c) Par une récurrence immédiate on a pour  $p \geq 0$ ,

$$I_{2p} = \frac{2p-1}{2p} \times I_{2p-2} = \dots = \frac{2p-1}{2p} \times \frac{2p-3}{2p-2} \times \frac{1}{2} I_0$$

et donc

$$I_{2p} = \frac{\prod_{k=1}^p 2k-1}{\prod_{k=1}^p 2k} \frac{\pi}{2} = \frac{\prod_{k=1}^{2p} k}{\left(\prod_{k=1}^p 2k\right)^2} \frac{\pi}{2} = \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2} \frac{\pi}{2}$$

De même,

$$I_{2p+1} = \frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!}$$

2. (a) Pour tout entier naturel  $n$ ,

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^{n+1} - (\sin t)^n dt = \int_0^{\pi/2} (\sin t - 1)(\sin t)^n dt \leq 0$$

car pour  $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ,  $(\sin t - 1)(\sin t)^n \leq 0$ .

La suite  $(I_n)$  décroît.

(b) La formule trouvée en 1.b) montre que

$$\frac{I_{n+2}}{I_n} = \frac{n+1}{n+2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

et donc  $I_n \sim I_{n+2}$ .

En utilisant maintenant la décroissance de la suite  $(I_n)$ ,

$$I_{n+2} \leq I_{n+1} \leq I_n$$

En divisant par  $I_n > 0$ ,

$$\frac{I_{n+2}}{I_n} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1$$

Par le théorème d'encadrement,  $\frac{I_{n+1}}{I_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$  et donc  $I_{n+1} \sim I_n$ .

(c) On pose  $\theta_n = (n+1)I_n I_{n+1}$ .

Pour tout entier naturel  $n$ ,

$$\theta_{n+1} = (n+2)I_{n+1}I_{n+2} = (n+2)I_{n+1} \times \frac{n+1}{n+2}I_n = \theta_n$$

La suite  $(\theta_n)$  est constante égale à  $\theta_0 = I_0 \cdot I_1 = \frac{\pi}{2}$ .

On en déduit que  $I_n \cdot I_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)}$ .

En utilisant la question précédente, on a donc

$$I_n^2 \sim I_n \cdot I_{n+1} \sim \frac{\pi}{2(n+1)} \sim \frac{\pi}{2n}$$

En prenant la racine carrée et en utilisant que  $I_n$  est positif, on obtient que  $I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ .

3. Reprenons la formule trouvée pour  $I_{2p}$  en remplaçant les factorielles avec la formule obtenue en fin de la partie I

$$I_{2p} = \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2} \frac{\pi}{2} \sim \frac{K(2p)^{2p} e^{-2p} \sqrt{2p}}{(K2^p p^p e^{-p} \sqrt{p})^2} \frac{\pi}{2} \sim \frac{\sqrt{2p} \pi}{Kp} \frac{\pi}{2} \sim \frac{\pi}{K\sqrt{2p}}$$

En reprenant l'équivalent trouvé à la question précédente,

$$\frac{\pi}{K\sqrt{2p}} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{4p}}$$

On en déduit que la constante  $K$  de la question 4.b) de la partie I vaut  $\sqrt{2\pi}$ .