Le but du problème est de démontrer la formule de Stirling qui donne un équivalent de $n!$ quand n tend vers $+\infty$.

On a l'équivalent :

$$n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n} = n^{n+1/2}e^{-n}\sqrt{2\pi}$$

Partie I : Dans cette partie, on va montrer qu'il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que $n! \sim Kn^n e^{-n}\sqrt{n}$.

On commence par étudier $\ln(n!) = \sum_{k=2}^{n} \ln(k)$.

On peut se dire que $\ln(n!)$ ne doit pas être très différent de $n\ln n$. On étudie donc $\ln(n!) - n\ln n$.

1. (a) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, $n\ln n = \sum_{k=2}^{n} k\ln(k) - (k-1)\ln(k-1)$.

   (b) En déduire que pour tout entier $n \geqslant 2$, $\ln(n!) - n\ln n = \sum_{k=2}^{n}(k-1)\ln\left(1-\frac{1}{k}\right)$.

2. Faire un développement asymptotique de $(k-1)\ln\left(1-\frac{1}{k}\right)$ pour k tendant vers $+\infty$ à l'ordre 2.

3. En déduire qu'il existe une suite (α_k) telle que

$$\alpha_k \sim \frac{1}{6k^2} \text{ et } \forall n \geqslant 2, \ln(n!) = n\ln n - n + 1 + \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{2k} + \sum_{k=2}^{n}\alpha_k.$$

4. (a) Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ telle que

$$\left(\ln(n!) - \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln(n) + n\right) \longrightarrow C.$$

   On pourra utiliser que

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1).$$

   (b) En déduire qu'il existe une constante K telle que

$$n! \sim Kn^n e^{-n}\sqrt{n}.$$

Partie II :

On veut maintenant déterminer la valeur de K. Pour cela on définit pour tout entier $n \geqslant 0$,

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t\, dt.$$

1. (a) Calculer I_0 et I_1.

   (b) A l'aide d'une intégration par parties montrer que $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}I_n$.

   (c) En déduire des formules pour I_{2p} et I_{2p+1}. Les formules voulues font intervenir des factorielles et des puissances de 2.

2. (a) Déterminer le sens de variation de (I_n).

   (b) Montrer que $I_{n+2} \sim I_n$ et en déduire que $I_n \sim I_{n+1}$.

   (c) Montrer que $(n+1)I_nI_{n+1}$ est une suite constante et en déduire que $I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

3. Montrer que la constante K de la question 4.b) de la partie I vaut $\sqrt{2\pi}$.