1. On pose $u_n = \left(\dfrac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)^n - 1$. Montrer que $u_n \sim \dfrac{1}{\ln n}$ et en déduire la nature de $\sum u_n$

Corrigé

On a

$$\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)^n - 1 = \exp\left(n\ln\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)\right) - 1 = \exp\left(n\ln\left(1+\frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln n}\right)\right) - 1.$$

On a de plus,

$$\alpha_n = n\ln\left(1+\frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln n}\right) \sim n\times\frac{1}{n\ln n} \sim \frac{1}{\ln n}.$$

Comme $(\alpha_n) \longrightarrow 0$, $\exp(\alpha_n) - 1 \sim \alpha_n$ et donc,

$$u_n \sim \frac{1}{\ln n}.$$

On en déduit, par comparaison pour les séries à termes positifs que $\sum u_n$ diverge car $\dfrac{1}{\ln n} \geqslant \dfrac{1}{n}$ et que la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

2. Nature de la série $\left(\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{\ln n + \sqrt{n}}{3^n - 5^n}\right)$

Corrigé

On réalise un équivalent

$$\frac{\ln n + \sqrt{n}}{3^n - 5^n} \sim -\frac{\sqrt{n}}{5^n}.$$

Maintenant, par croissance comparée, $n^2 \times \dfrac{\sqrt{n}}{5^n} = \dfrac{n^{5/2}}{5^n} \longrightarrow 0$. On en déduit que $-\dfrac{\sqrt{n}}{5^n} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. De ce fait, la série $\sum -\dfrac{\sqrt{n}}{5^n}$ converge (absolument) et donc (comparaison pour les séries à termes négatifs) $\sum \dfrac{\ln n + \sqrt{n}}{3^n - 5^n}$ aussi.

3. On considère la série $\left(\displaystyle\sum_{n\geqslant 4} \frac{-3n+12}{n^3 - 5n^2 + 6n}\right)$

   (a) Justifier la convergence de la série

Corrigé

On réalise un équivalent.

$$\frac{-3n+12}{n^3-5n^2+6n} \sim -3\frac{n}{n^3} \sim -3\frac{1}{n^2}.$$

Par comparaison pour les séries à termes négatifs avec les séries de Riemann, la série converge.

(b) Calculer la somme de la série

Corrigé

On va utiliser un téléscopage. Pour cela, on calcule la décomposition en éléments simples de

$$F(X) = \frac{-3X+12}{X^3-5X^2+6X} = \frac{-3X+12}{X(X-2)(X-3)} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X-2} + \frac{c}{X-3}.$$

Les méthodes classiques donnent $a = 2, b = -3$ et $c = 1$. Finalement, pour tout entier $n \geqslant 4$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=4}^{n} \frac{-3n+12}{n^3-5n^2+6n} &= 2\sum_{k=4}^{n}\frac{1}{k} - 3\sum_{k=4}^{n}\frac{1}{k-2} + \sum_{k=4}^{n}\frac{1}{k-3} \\
&= 2\sum_{k=4}^{n}\frac{1}{k} - 3\sum_{k=2}^{n-2}\frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n-3}\frac{1}{k} \\
&= 2\sum_{k=4}^{n}\frac{1}{k} \\
&\quad -3\left(\sum_{k=4}^{n}\frac{1}{k} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n-1}\right) \\
&\quad +\left(\sum_{k=4}^{n}\frac{1}{k} + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n-2}\right) \\
&= -\frac{2}{3} + \alpha_n
\end{aligned}$$

où α_n tend vers 0. On en déduit que

$$\sum_{k=4}^{+\infty} \frac{-3n+12}{n^3-5n^2+6n} = -\frac{2}{3}.$$