

1. Déterminer la nature des intégrales suivantes :

Corrigé

- | | | |
|---|--|---|
| a) $\int_0^1 \ln(t) dt$ | <input checked="" type="checkbox"/> Converge | <input type="checkbox"/> Diverge |
| b) $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}(1+t)}$ | <input checked="" type="checkbox"/> Converge | <input type="checkbox"/> Diverge |
| c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan(t) dt$ | <input type="checkbox"/> Converge | <input checked="" type="checkbox"/> Diverge |
| d) $\int_0^{+\infty} (t^2 + 1)t^{-2} dt$ | <input type="checkbox"/> Converge | <input checked="" type="checkbox"/> Diverge |
| e) $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t^4 + t^3 - t^2}}$ | <input type="checkbox"/> Converge | <input checked="" type="checkbox"/> Diverge |

– a) vu en cours

– b) la fonction est équivalente à $\frac{1}{\sqrt{t}}$ en 0 et à $\frac{1}{t\sqrt{t}}$ en $+\infty$.

– c) on se ramène en 0 en posant $t = \frac{\pi}{2} - u$ et on étudie $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(u)}{\sin(u)} du$. Cette intégrale diverge

$$\text{car } \frac{\cos(u)}{\sin(u)} \underset{0}{\sim} \frac{1}{u}.$$

– d) la fonction est équivalente à $\frac{1}{t^2}$ en 0.

– e) la fonction est équivalente à $\frac{2}{t}$ en $+\infty$.

2. A l'aide de concavité / convexité, déterminer α, β, γ et δ tels que pour tout $x \in [0, 1]$,

$$\alpha x + \beta \leq e^x + x \leq \gamma x + \delta$$

Corrigé

On pose $f : x \mapsto e^x + x$. C'est une fonction convexe sur $[0, 1]$ car sa dérivée seconde $f'' : x \mapsto e^x$ est positive. On en déduit que \mathcal{C}_f est au dessus de ses tangentes et en dessous de ses cordes. La tangente à \mathcal{C}_f au point $(0, 1)$ est la droite d'équation $y = 2x + 1$ car $f'(0) = 2$. Comme le point d'abscisse 1 a une ordonnée égale à $e + 1$, la corde a pour équation $y = ex + 1$. Finalement

$$\alpha = 2 \quad \beta = 1 \quad \gamma = e \quad \delta = 1$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}}$. Déterminer une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1} .

Corrigé

Soit $n \in \mathbb{N}$. On commence par remarquer que $x \mapsto \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et

$\frac{1}{(1+x^2)^{n+1}} \sim \frac{1}{x^{2(n+1)}}$ donc I_n est bien définie.

On a alors par intégration par parties :

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}} \\ &= \left[\frac{x}{(1+x^2)^{n+1}} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{2(n+1)x^2}{(1+x^2)^{n+2}} dx \quad \text{CAR LE CROCHET CONVERGE} \\ &= 2(n+1) \left(\int_0^{+\infty} \frac{1+x^2}{(1+x^2)^{n+2}} dx - \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^{n+2}} dx \right) \\ &= 2(n+1)I_n - 2(n+1)I_{n+1} \end{aligned}$$

On en déduit que $I_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2} I_n$.