1. On rappelle que pour $t \in]-1,1[$, $\ln(1-t) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k}$.

   Exprimer $\int_0^1 \frac{\ln(t)\ln(1-t)}{t} dt$ à l'aide de la somme d'une série.

Corrigé

Pour $t \in]-1,1[$, $\ln(1-t) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k}$. De sorte que pour $t \in]0,1[$,

$$\frac{\ln(t)\ln(1-t)}{t} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{k-1}\ln(t)}{k} = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k \ln(t)}{k+1}$$

On veut appliquer le théorème d'intégration terme à terme. On pose pour tout $k \in \mathbf{N}$, f_k la fonction définie sur $]0,1[$ par

$$f_k : t \mapsto -\frac{t^k \ln(t)}{1+k}$$

- La fonction $f_0 : t \mapsto \ln t$ est intégrable sur $]0,1]$ car elle est continue sur $]0,1]$ et $\ln t \underset{t\to 0}{=} O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$; pour $k \geqslant 1$, les fonctions f_k sont continues sur $]0,1]$ et prolongeables par continuité en 0 car $t^k \ln(t) \xrightarrow[t\to 0]{} 0$. Elles sont donc intégrables sur $]0,1]$.
- La série de fonctions $\sum_{k\geqslant 0} f_k$ converge simplement sur $]0,1[$ vers $t \mapsto \frac{\ln(t)\ln(1-t)}{t}$ qui est continue.
- Soit $k \in \mathbf{N}$, on réalise une intégration par parties (le crochet converge et vaut 0 pour la même raison que ci-dessus) :

$$\int_0^1 f_k = \left[-\frac{t^{k+1}\ln t}{(k+1)^2}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{t^k}{(k+1)^2} dt = \frac{1}{(k+1)^3}$$

  La série $\sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{(k+1)^3}$ converge d'après Riemann car $3 > 1$.

On peut donc appliquer le théorème d'intégration terme à terme.

- La fonction $t \mapsto \frac{\ln(t)\ln(1-t)}{t}$ est intégrable
- On a l'égalité :

$$\int_0^1 \frac{\ln(t)\ln(1-t)}{t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f_k = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3} = \zeta(3).$$

2. (a) Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-u^n}du$

Corrigé

On veut appliquer le théorème de convergence dominée. On pose $f_n : u \mapsto \sqrt{1-u^n}$ définie et continue sur $[0,1]$. La suite de fonction converge simplement vers f définie par

$$f : u \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x < 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

De plus, en posant φ la fonction constante égale à 1 qui est intégrable sur $[0,1]$ on a, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $|f_n| \leqslant \varphi$.
On en déduit par le théorème de convergence dominée que

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \sqrt{1-u^n}du = \int_0^1 f(u)du = 1.$$

(b) En déduire un équivalent de $I_n = \displaystyle\int_0^n \sqrt{1-\left(1-\frac{x}{n}\right)^n}dx$.

Corrigé

On pose le changment de variable $u = \left(1-\frac{x}{n}\right)$ qui est affine. On a $du = -\frac{1}{n}dx$. On en déduit

$$\int_0^n \sqrt{1-\left(1-\frac{x}{n}\right)^n}dx = -n\int_1^0 \sqrt{1-u^n}du = n\int_0^1 \sqrt{1-u^n}du$$

Comme $\int_0^1 \sqrt{1-u^n}du \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$ on a $I_n \sim n$.