

**Partie I : Endomorphisme diagonalisable :**

1) Si on suppose que  $p = 1$  on a que  $E$  est un espace propre associé à une valeur propre  $\lambda$  pour  $f$ . De ce fait,  $f$  est l'homothétie de rapport  $\lambda$ . En en déduit que tous les sous-espaces vectoriels de  $E$  sont stables par  $f$ .

2) a) On se donne des sous-espaces vectoriels  $F_1, \dots, F_p$  tels que pour tout  $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$ ,  $F_i \subset E_i$ . Montrons qu'ils sont en somme directe.

Soit  $(u_1, \dots, u_p) \in F_1 \times \dots \times F_p$  tels que  $u_1 + \dots + u_p = 0$ . Comme pour chaque  $i$ ,  $u_i \in E_i$  et que les espaces propres  $E_i$  sont en somme directe, on en déduit que pour tout  $i$ ,  $u_i = 0$ . Cela signifie que les espaces vectoriels  $F_i$  sont en somme directe.

b) On pose  $F = \bigoplus_{i=1}^p F_i$ . Soit  $x = \sum_{i=1}^p x_i$  un élément de  $F$  (où pour tout  $i$ ,  $x_i \in F_i$ ). Comme  $F_i \subset E_i$  on a

$$f(x) = \sum_{i=1}^p f(x_i) = \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i \in \bigoplus_{i=1}^p F_i = F.$$

On a bien montré que  $F$  était stable par  $f$ .

3) On considère un sous-espace vectoriel  $F$  stable par  $f$ .

a) Dans l'espace  $E = \mathbb{K}^2$ , on pose  $A = \text{Vect}(u_1)$ ,  $B = \text{Vect}(u_2)$  et  $C = \text{Vect}(u_3)$  où  $u_1 = (1, 0)$ ,  $u_2 = (0, 1)$  et  $u_3 = (1, 1)$ . On a alors  $A$  et  $B$  qui sont en somme directe et  $A \oplus B = E$  pour des raisons de dimension. Cependant,  $A \cap C = B \cap C = \{0\}$  et donc

$$\{0\} = (A \cap C) \oplus (B \cap C) \neq E.$$

b) Soit  $x$  un élément de  $F$ . Comme  $f$  est diagonalisable,  $E = \bigoplus_{i=1}^p E_i$ . De ce fait, on peut décomposer  $x = \sum_{i=1}^p x_i$  où pour tout  $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$ ,  $x_i \in E_i$ .

c) Calculons  $f(x)$ .

$$f(x) = \sum_{i=1}^p f(x_i) = \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i.$$

On en déduit que

$$\lambda_1 x - f(x) = \sum_{i=1}^p (\lambda_1 - \lambda_i) x_i = \sum_{i=2}^p \mu_i x_i$$

où  $\mu_i = \lambda_1 - \lambda_i$  pour  $i \geq 2$ .

Maintenant, comme  $F$  est stable par  $f$ ,  $\lambda_1 x - f(x) \in F$ .

d) On veut montrer que pour tout  $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$ ,  $x_i \in F$ . Par symétrie, il suffit de montrer que  $x_p \in F$ . Pour cela on va montrer que pour tout  $j \in \llbracket 1; p \rrbracket$ , il existe une combinaison linéaire  $\sum_{i=j}^p \mu_i(j) x_i$  appartenant à  $F$  où pour tout  $i \in \llbracket j; p \rrbracket$ ,  $\mu_i(j) \neq 0$

— Initialisation. Pour  $i = 1$  c'est vrai. Il suffit de prendre  $\forall i \in \llbracket 1; p \rrbracket$ ,  $\mu_i(1) = 1$ .

— Hérédité. Soit  $j \in \llbracket 1 ; p-1 \rrbracket$ . On suppose qu'il existe une combinaison linéaire  $\sum_{i=j}^p \mu_i(j)x_i$  appartenant à  $F$  où pour tout  $i \in \llbracket j ; p \rrbracket$ ,  $\mu_i(j) \neq 0$ .

On procède comme dans la question précédente. Si on note  $y_j = \sum_{i=j}^p \mu_i(j)x_i$  on a

$$f(y_j) = \sum_{i=j}^p \lambda_i \mu_i(j)x_i. \text{ En particulier}$$

$$y_{j+1} = \lambda_j y_j - f(y_j) = \sum_{i=j}^p (\lambda_j - \lambda_i) \mu_i(j)x_i = \sum_{i=j+1}^p \mu_i(j+1)x_i$$

en posant  $\mu_i(j+1) = (\lambda_j - \lambda_i) \mu_i(j) \neq 0$ .

Maintenant pour  $j = p$  on obtient donc que  $\mu_p(p)x_p \in F$ . Comme  $\mu_p(p) \neq 0$  on a bien  $x_p \in F$ .

e) On vient de montrer qu'avec les notations précédentes,  $F \subset \bigoplus_{i=1}^p F_i$  où  $F_i = E_i \cap F$ . Comme il est clair que l'inclusion inverse est vraie :  $\bigoplus_{i=1}^p F_i \subset F$ . On obtient bien que  $F = \bigoplus_{i=1}^p F_i$ .

4) On vient de voir que  $F = \bigoplus_{i=1}^p F_i$ . Maintenant, par définition,  $F_i$  est l'espace propre (éventuellement réduit à  $\{0\}$ ) de  $\tilde{f}$  associé à la valeur propre  $\lambda_i$  donc  $\tilde{f}$  est diagonalisable.

## Partie II : Endomorphisme nilpotent :

1) On suppose dans cette question que  $E = \mathbb{R}_{n-1}[X]$  et que  $f$  est l'endomorphisme de dérivation  $f : P \mapsto P'$ .

a) Soit  $k$  un entier inférieur à  $n-1$ . Soit  $P \in \mathbb{R}_{k-1}[X]$ , on a  $f(P) = P'$  et  $\deg(P') \leq \deg(P) \leq k-1$ . On a bien  $f(P) \in \mathbb{R}_{k-1}[X]$ . Le sous-espace vectoriel  $\mathbb{R}_{k-1}[X]$  est stable par  $f$ .

b) Soit  $F$  un sous-espace vectoriel stable par  $f$ . On suppose que  $F \neq \{0\}$ . De ce fait l'ensemble  $\{\deg(P) \mid P \in F\}$  est une partie de  $\mathbb{N}$  majorée par  $n-1$ . On en déduit qu'elle admet un plus grand élément que nous noterons  $p$ . On a donc  $F \subset \mathbb{R}_p[X]$ .

Réciproquement, soit  $P$  un polynôme de  $F$  de degré  $p$ ,  $P' = f(P) \in F$ . De même, pour tout  $k \in \llbracket 0 ; p \rrbracket$ ,  $P^{(k)} = f^k(P) \in F$ . On en déduit que  $\text{Vect}(P, P', \dots, P^{(p)}) \subset F$ . Maintenant si on note  $Q_i = P^{(p-i)}$ , on a  $\deg(Q_i) = \deg P^{(p-i)} = p - (p-i) = i$ . On en déduit que la famille  $(Q_0, \dots, Q_p)$  est une base de  $\mathbb{R}_p[X]$  (par exemple en vérifiant que la matrice de la famille dans la base canonique de  $\mathbb{R}_p[X]$  est triangulaire supérieure avec des coefficients non nuls sur la diagonale).

En conclusion  $F = \mathbb{R}_p[X]$ .

2) Soit  $f$  un endomorphisme nilpotent d'ordre  $n$ . C'est-à-dire que l'on suppose que  $f^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$  et  $f^{n-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ .

a) Soit  $x \in E$  tel que  $f^{n-1}(x) \neq 0$ . Montrer que est une base de  $E$ . La famille  $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$  ayant  $n$  vecteurs et  $E$  étant de dimension  $n$ , il suffit de montrer qu'elle est libre pour montrer que c'est une base.

Supposons par l'absurde qu'elle ne soit pas libre, il existe alors une relation de dépendance linéaire non triviale entre les vecteurs de la famille :  $\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i f^i(x) = 0$ . La famille

$(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1})$  n'étant pas nulle on note  $p$  le plus élément de  $\llbracket 0; n-1 \rrbracket$  tel que  $\lambda_p \neq 0$ .  
En appliquant  $f^{n-1-p}$  on obtient

$$0 = f^{n-1-p} \left( \sum_{i=p}^{n-1} \lambda_i f^i(x) \right) = \sum_{i=p}^{n-1} \lambda_i f^{n-1-p+i}(x) = \lambda_p f^{n-1}(x).$$

On en déduit que  $\lambda_p = 0$  ce qui est contraire à l'hypothèse.

b) On pose  $u_i = i!f^{n-i}(x)$  pour  $i \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$ . La famille  $\mathcal{E} = (u_0, \dots, u_{n-1})$  est une base de  $E$  car c'est la même famille que celle de la question précédente à l'ordre et à des facteurs multiplicatifs non nuls près.

On remarque alors que  $f(u_0) = f^n(x) = 0$  et que pour  $i \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$ ,  $f(u_i) = i!f(f^{n-i}(x)) = i!f^{n-(i-1)} = i u_{i-1}$ .

On en déduit que

$$\text{Mat}_{\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 & n-1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

c) Soit  $\Phi : E \rightarrow \mathbb{R}_{n-1}[X]$  l'application linéaire définie par  $\forall i \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket, \Phi(u_i) = X^i$ . Elle transforme la base  $\mathcal{E}$  en la base canonique de  $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ , c'est donc un isomorphisme.

On remarque que la matrice de  $f$  dans la base  $\mathcal{E}$  est la même que la matrice de l'endomorphisme de dérivation (que nous noterons maintenant  $\Delta$ ) dans la base canonique de  $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ . On a donc  $\Delta \circ \Phi = \Phi \circ f$ .

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\Phi} & \mathbb{R}_{n-1}[X] \\ f \downarrow & & \downarrow \Delta \\ E & \xrightarrow{\Phi} & \mathbb{R}_{n-1}[X] \end{array}$$

A tout sous-espace vectoriel  $F$  de  $E$  on « associe » un  $\tilde{F}$  de  $\mathbb{R}_{n-1}[X]$  défini par

$$\tilde{F} = \Phi(F) = \left\{ \sum a_i X^i \mid a_0 u_0 + \cdots + a_{n-1} u_{n-1} \in F \right\}$$

On a alors que  $F$  est stable par  $f$  si et seulement si  $\tilde{F}$  est stable par  $\Delta$  ce qui revient d'après la question II.1) à ce que  $\tilde{F} = \mathbb{R}_p[X]$  pour  $p \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$  si ce n'est pas l'espace vectoriel  $\{0\}$ . On en déduit que les espaces stables par  $f$  sont les

$$F_p = \text{Vect}(u_0, \dots, u_p).$$