Exercice I

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ et M la matrice de f dans la base canonique. On suppose que $M^3 = -M$.

1) Soit $y \in \mathrm{Im}(f)$. Soit $x \in \mathbb{R}^3$ tel que $y = f(x)$ (un tel x existe).

$$f^2(y) = f^3(x) = -f(x) = -y$$

2) D'après la question précédente, $g^2 = -id_{\mathrm{Im}(f)}$. Donc $\det(g^2) = (-1)^{\dim(\mathrm{Im}(f))} = (-1)^{\mathrm{rg}(f)}$. Par ailleurs $\det(g^2) = (\det(g))^2 \geqslant 0$ car $\det g$ est un réel.
Donc $\mathrm{rg}(g)$ est pair.

3) Comme $M \neq 0$, le rang de f n'est pas nul. Etant inférieur ou égal à $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, ce rang vaut 2.
Soit $y \in \mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f)$.

$$-y = f^2(y) = f(0) = 0$$

Donc $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$ sont en somme directe. De plus $\dim \mathrm{Ker}(f) = 3 - 2 = 1$ par le théorème du rang.
Donc $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$ sont supplémentaires.
Soit e_1 un vecteur non nul de $\mathrm{Im}(f)$ et soit $e_2 = f(e_1)$. Alors $f(e_2) = f^2(e_1) = -e_1$.
Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = 0$.
Prenant les images par f des deux membres il vient $\lambda_1 e_2 - \lambda_2 e_1 = 0$.
Multipliant la première de ces deux égalités par λ_1 et la seconde par $-\lambda_2$, on en déduit que $(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)e_1 = 0$, et comme e_1 n'est pas nul et que λ_1 et λ_2 sont réels, ils sont nuls.
Donc (e_1, e_2) est libre. Etant de longueur 2, c'est une base de $\mathrm{Im}(f)$. En lui concaténant une base (e_3) de $\mathrm{Ker}(f)$ on obtient une base dans laquelle la matrice de f est
$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
donc M est semblable à cette matrice.

Exercice II

1) a) La fonction g étant continue sur le segment $[0,1]$, elle y est bornée. Par 1-périodicité de g, elle est $\boxed{\text{bornée sur } \mathbb{R}}$. En effet, notant M un majorant de $|g|$ sur $[0,1]$, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|g(x)| = |g(y)| \leqslant M$ où $y = x - \lfloor x \rfloor \in [0,1[$.

b) Notons $f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto a^n g(b^n x)$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $0 \leqslant |a^n g(b^n x)| \leqslant ||g||_\infty a^n$ donc $\boxed{\sum f_n \text{ converge normalement sur } \mathbb{R}}$, donc converge simplement.

c) Par la question précédente, $\sum f_n$ converge uniformément. Les fonctions f_n étant continues, la fonction $\boxed{W \text{ est continue}}$.

De plus pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|W(x)| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} ||g||_\infty a^n = \frac{||g||_\infty}{1-a}$. Ainsi W est bornée et $\boxed{||W||_\infty \leqslant \frac{||g||_\infty}{1-a}}$.

2) a) Soit f une fonction bornée de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|T(f)(x)| \leqslant a||f||_\infty$$

Donc $\boxed{T(f) \text{ est bornée}}$.
Pour f et g bornées et $\lambda \in \mathbb{R}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$T(\lambda f + g)(x) = a(\lambda f + g)(bx) = \lambda a f(bx) + a g(bx) = \lambda T(f)(x) + T(g)(x)$$

donc $\boxed{T \text{ est linéaire}}$.

b) Soit f bornée telle que $T(f) = f$.
On a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = af(bx)$$

Comme $x \mapsto bx$ est surjective de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, on a

$$||x \mapsto f(bx)||_\infty = ||f||_\infty$$

Comme $||.||_\infty$ est une norme, on a donc $||f||_\infty = |a|.||f||_\infty = a||f||_\infty$.
Comme $a \neq 1$ et $(1-a)||f||_\infty = 0$, on a $||f|||_\infty = 0$ donc f est nulle.
Donc $\boxed{\text{1 n'est pas une valeur propre de } T}$.

c) Remarquons que pour tout naturel n, $T(f_n) = f_{n+1}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $T(W)(x) = aW(bx) = a\sum_{n=0}^{\infty} a^n g(b^n bx) = \sum_{p=1}^{\infty} g(b^p x) = W(x) - g(x)$.
Donc $\boxed{T(W) = W - g}$.
Soit Z une fonction bornée vérifiant la même relation.
Par linéarité de T, $T(W-Z) = W-Z$. Comme 1 n'est pas valeur propre de T, $W - Z = 0$ donc $\boxed{W = Z}$.

3) a) Comme $\beta_m - x_0 \underset{m\to\infty}{\to} 0$ et $\alpha_m - x_0 \underset{m\to\infty}{\to} 0$

$$\frac{f(\beta_m) - f(\alpha_m)}{\beta_m - \alpha_m} = \frac{f(x_0) + f'(x_0)(\beta_m - x_0) + o(\beta_m - x_0) - \Big(f(x_0) + f'(x_0)(\alpha_m - x_0) + o(\alpha_m - x_0)\Big)}{\beta_m - \alpha_m}$$

Or $|\beta_m - x_0| = \beta_m - x_0 \leqslant \beta_m - \alpha_m = |\beta_m - \alpha_m|$ et $|\alpha_m - x_0| = x_0 - \alpha_m \leqslant \beta_m - \alpha_m = |\beta_m - \alpha_m|$ donc $\beta_m - x_0 = O(\beta_m - \alpha_m)$ et $\alpha_m - x_0 = O(\beta_m - \alpha_m)$.
Ainsi

$$\begin{aligned}\frac{f(\beta_m) - f(\alpha_m)}{\beta_m - \alpha_m} &= \frac{f'(x_0)(\beta_m - x_0) - f'(x_0)(\alpha_m - x_0) + o(\beta_m - \alpha_m)}{\beta_m - \alpha_m} \\ &= \frac{f'(x_0)(\beta_m - \alpha_m) + o(\beta_m - \alpha_m)}{\beta_m - \alpha_m} \boxed{\underset{m\to\infty}{\to} f'(x_0)}\end{aligned}$$

b) Pour tout réel x, et tout entier k, l'encadrement $-\frac{1}{2} < x - k \leqslant \frac{1}{2}$ équivaut à $x + \frac{1}{2} > k \geqslant x - \frac{1}{2}$.
Il existe $\boxed{\text{un unique entier } k \text{ vérifiant ceci}}$, c'est $\lceil x - \frac{1}{2} \rceil$.
On applique ce résultat à $x = b^m x_0$.

c) $\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$
$|\sin x - \sin y| = 2|\sin \frac{x-y}{2}|.|\cos \frac{x+y}{2}| \leqslant 2|\sin \frac{x-y}{2}|$
Par récurrence, $|\sin x - \sin y| \leqslant 2^n |\sin \frac{x-y}{2^n}| = |x-y| \left| \frac{\sin \frac{x-y}{2^n}}{\frac{x-y}{2^n}} \right|$.
Or $\frac{x-y}{2^n} \underset{n\to\infty}{\to} 0$. Par passage à la limite dans les inégalités larges,

$$\boxed{|\sin x - \sin y| \leqslant |x-y|.1 = |x-y|}$$

.
(c'est plus simple avec l'inégalité des accroissements finis...)

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{n=0}^{m-1} a^n \frac{g(b^n\beta_m)-g(b^n\alpha_m)}{\beta_m-\alpha_m}\right| &\leqslant \sum_{n=0}^{m-1} \left|a^n \frac{g(b^n\beta_m)-g(b^n\alpha_m)}{\beta_m-\alpha_m}\right| \\
&= \sum_{n=0}^{m-1} \left|a^n \frac{\sin(2\pi b^n\beta_m)-\sin(2\pi b^n\alpha_m)}{\beta_m-\alpha_m}\right| \\
&\leqslant \sum_{n=0}^{m-1} a^n \frac{|2\pi b^n\beta_m - 2\pi b^n\alpha_m|}{\beta_m-\alpha_m} \\
&= \boxed{2\pi \sum_{n=0}^{m-1} a^n b^n} \\
&= 2\pi \frac{(ab)^m-1}{ab-1}
\end{aligned}$$

d)

$$2\pi b^m \alpha_m = 2\pi(k_m - \frac{3}{4}) \equiv -\frac{3\pi}{2}\ [2\pi]$$

donc $\boxed{g(b^m\alpha_m)=1}$

$$2\pi b^m \beta_m = 2\pi(k_m + \frac{3}{4}) \equiv \frac{3\pi}{2}\ [2\pi]$$

donc $\boxed{g(b^m\beta_m)=-1}$

Soit n un entier tel que $n > m$.

$$2\pi b^n \alpha_m = 2\pi b^{n-m}(k_m - \frac{3}{4}) \equiv -\frac{3\pi b^{n-m}}{2} \equiv 0\ [\pi]$$

car b est un entier pair et $n-m>0$ donc b^{n-m} est pair.

Donc $\boxed{g(b^n\alpha_m)=0}$.

De même, $\boxed{g(b^n\beta_m)=0}$.

e)

$$\begin{aligned}
\frac{W(\beta_m)-W(\alpha_m)}{\beta_m-\alpha_m} &= \sum_{n=0}^{\infty} a^n \frac{g(b^n\beta_m)-g(b^n\alpha_m)}{\beta_m-\alpha_m} \\
&= \sum_{n=0}^{m-1} a^n \frac{g(b^n\beta_m)-g(b^n\alpha_m)}{\beta_m-\alpha_m} + a^m \frac{-1-1}{\beta_m-\alpha_m} \\
&\leqslant \left|\sum_{n=0}^{m-1} a^n \frac{g(b^n\beta_m)-g(b^n\alpha_m)}{\beta_m-\alpha_m}\right| - \frac{2a^m}{\beta_m-\alpha_m} \\
&\leqslant 2\pi \frac{(ab)^m-1}{ab-1} - \frac{2a^m}{\beta_m-\alpha_m} \\
&\leqslant 2\pi \frac{(ab)^m}{ab-1} - \frac{2a^m}{\frac{6}{4b^m}} \\
&= \boxed{(ab)^m \left(\frac{2\pi}{ab-1} - \frac{4}{3}\right)}
\end{aligned}$$

f) Supposons que $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$.

$ab - 1 > \frac{3\pi}{2}$ donc $\frac{1}{ab-1} < \frac{2}{3\pi}$ et $\frac{2\pi}{ab-1} < \frac{4}{3}$ et comme $ab>1$, on a par la majoration précédente :

$$\frac{W(\beta_m)-W(\alpha_m)}{\beta_m-\alpha_m} \underset{m\to\infty}{\to} -\infty$$

Or $b^m x_0 - \frac{1}{2} \leqslant k_m < b_m x_0 + \frac{1}{2}$ donc $x_0 - \frac{1}{2b^m} \leqslant k_m < x_0 + \frac{1}{2b^m}$ donc
$x_0 - \frac{1}{2b^m} - \frac{3}{4b^m} \leqslant \alpha_m < x_0 + \frac{1}{2b^m} - \frac{3}{4b_m} < x_0$
et
$x_0 < x_0 - \frac{1}{2b^m} + \frac{3}{4b^m} \leqslant \beta_m < x_0 + \frac{1}{2b^m} + \frac{3}{4b_m} < x_0$
On en déduit que les suites (α_m) et (β_m) vérifient bien les hypothèses de la question 3)a).
Donc, d'après cette même question, W n'est pas dérivable en x_0 (car sinon on aurait $W'(x_0) = -\infty$.)
Ainsi $\boxed{W \text{ n'est dérivable en aucun point}}$.

Cet exemple donné par Weierstrass d'une fonction continue partout et dérivable nulle part a choqué certains lors de sa publication. Charles Hermite écrit dans une lettre à Thomas Stieltjes :

"Je me détourne avec horreur et effroi de cette plaie lamentable des fonctions continues qui n'ont pas de dérivées"