Exercice

1) a) Par intégration par parties (les applications en questions sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[2,x]$ si $x>0$) :
$\displaystyle\int_2^x \frac{1}{\ln t}dt = \left[\frac{t}{\ln t}\right]_2^x - \int_2^x t\,.\left(-\frac{1}{t}\right)\frac{1}{(\ln t)^2}dt = \frac{x}{\ln x} - \frac{2}{\ln 2} + R_0(x)$ avec $\displaystyle R(x) = \int_2^x \frac{1}{(\ln t)^2}dt.$
On pose donc $\boxed{g_0 = t \mapsto \dfrac{1}{(\ln t)^2}}$ et $\boxed{c_0 = -\dfrac{2}{\ln 2}}$.

b) $\displaystyle\frac{1}{(\ln x)^2} = \frac{1}{\ln x}\,.\,\frac{1}{\ln x} = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{\ln(x)}\right).$
Or $\displaystyle\frac{1}{x} = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{\ln(x)}\right)$ et $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est une fonction non intégrable sur $[2,+\infty[$, donc il en est de même de $x \longmapsto \dfrac{1}{\ln(x)}$ (les fonctions sont continues et positives).
Ainsi, par la propriété intégration des relations de comparaison (cas des intégrales divergentes de fonctions positives) $\displaystyle R_0(x) = \int_2^x \frac{1}{(\ln t)^2}\,dt = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\int_2^x \frac{1}{\ln t}\,dt\right).$

c) Comme $x \longmapsto \dfrac{1}{\ln(x)}$ est positive et non intégrable, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_2^x \frac{1}{\ln t}\,dt = +\infty,$
donc $\displaystyle -\frac{2}{\ln 2} = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\int_2^x \frac{1}{\ln t}\,dt\right).$
Ainsi, par les deux questions précédentes, $\displaystyle\int_2^x \frac{1}{\ln t}\,dt = \frac{x}{\ln x} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\int_2^x \frac{1}{\ln t}\,dt\right).$
Finalement : $\boxed{\displaystyle\int_2^x \frac{1}{\ln t}\,dt \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x}{\ln x}}$.

2) a) On réintègre par parties $\displaystyle\int_2^x \frac{dt}{(\ln t)^2}$; les fonctions sont de classe $\mathscr{C}^1$.

$$\begin{aligned}\int_2^x \frac{1}{(\ln t)^2}\,dt &= \left[\frac{t}{(\ln t)^2}\right]_2^x - \int_2^x t\left(-\frac{1}{t}\right)\frac{2}{(\ln t)^3}\,dt \\ &= \frac{x}{(\ln x)^2} - \frac{2}{(\ln 2)^2} + \int_2^x \frac{2}{(\ln t)^3}\,dt\end{aligned}$$

Ce qui donne
$$\int_1^x \frac{1}{\ln t}dt = \sum_{k=0}^{1}\frac{k!x}{(\ln x)^{k+1}} + c_1 + R_1(x)$$
où $\displaystyle c_1 = -\frac{2}{\ln 2} - \frac{2}{(\ln 2)^2}$ et $\displaystyle R_1(x) = \int_1^x g_1(t)dt$ avec $g_1 : t \mapsto \dfrac{2}{(\ln t)^3}dt.$
Procédons donc par récurrence. On pose pour tout entier n, le prédicat $\mathscr{P}(n)$ suivant :
$\displaystyle\mathscr{P}(n) : \int_2^x \frac{1}{\ln t}dt = \sum_{k=0}^{n}\frac{k!x}{(\ln(x))^{k+1}} + c_n + \int_2^x g_n(t)\,dt$ où $g_n : t \mapsto \dfrac{(n+1)!}{(\ln t)^{n+2}}$ et $\displaystyle c_n = -2\sum_{k=0}^{n}\frac{k!}{(\ln 2)^{k+1}}.$
— Initialisation. Le cas $k=0$ a été fait à la question 1.a ; le cas $k=1$ ci-dessus.

— Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose $\mathscr{P}(n-1)$ et on veut montrer $\mathscr{P}(n)$.
On procède encore à une intégration par partie de $R_{n-1}(x)$:

$$\begin{aligned}\int_2^x \frac{n!}{(\ln t)^{n+1}}\,dt &= \left[\frac{n!\,.\,t}{(\ln t)^{n+1}}\right]_2^x - \int_2^x n!\,.\,t\,.\left(-\frac{1}{t}\right)\frac{n+1}{(\ln t)^{n+2}}\,dt \\ &= \frac{n!\,.\,x}{(\ln x)^{n+1}} - \frac{n!\,.\,2}{(\ln 2)^{n+1}} + \int_2^x \frac{(n+1)!}{(\ln t)^{n+2}}\,dt\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\int_2^x \frac{1}{\ln t}dt &= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{k!x}{(\ln(x))^{k+1}} + c_{n-1} + \int_2^x \frac{n!}{(\ln t)^{n+1}}\,dt \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{k!x}{(\ln(x))^{k+1}} + c_{n-1} + \frac{n!\,.\,x}{(\ln x)^{n+1}} - \frac{n!\,.\,2}{(\ln 2)^{n+1}} + \int_2^x \frac{(n+1)!}{(\ln t)^{n+2}}\,dt \\ &= \sum_{k=0}^{n}\frac{k!x}{(\ln(x))^{k+1}} + c_n + \int_2^x g_n(t)\,dt\end{aligned}$$

où

$$c_n = c_{n-1} - \frac{n!\,.\,2}{(\ln 2)^{n+1}} = -2\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k!}{(\ln 2)^{k+1}} - \frac{n!\,.\,2}{(\ln 2)^{n+1}} = -2\sum_{k=0}^{n}\frac{k!}{(\ln 2)^{k+1}}$$

et

$$g_n : t \mapsto \frac{(n+1)!}{(\ln t)^{n+2}}$$

— Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathscr{P}(n)$.

b) On procède exactement comme en 1.b) :
$\dfrac{1}{(\ln x)^{n+3}} = \dfrac{1}{\ln x}\cdot\dfrac{1}{(\ln x)^{n+2}} = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{(\ln x)^{n+2}}\right)$.
Or $\dfrac{1}{x} = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{(\ln x)^{n+2}}\right)$ et $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est une fonction non intégrable sur $[2,+\infty[$, donc il en est de même de $x \longmapsto \dfrac{1}{(\ln x)^{n+2}}$ (les fonctions sont continues et positives).
Ainsi, par la propriété intégration des relations de comparaison (cas des intégrales divergentes de fonctions positives) $\displaystyle\int_2^x \frac{1}{(\ln t)^{n+3}}\,dt = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\int_2^x \frac{1}{(\ln t)^{n+2}}\,dt\right)$.
Comme $(n+1)!$ et $(n+2)!$ sont constantes, $\boxed{R_{n+1}(x) = \underset{x\to+\infty}{o}(R_n(x))}$

c) En reprenant l'intégration par parties faite dans l'hérédité de la récurrence de la question 2.a) (et en décalant de 1 les indices) :

$$R_n(x) = \int_2^x \frac{(n+1)!}{(\ln t)^{n+2}}\,dt = \frac{(n+1)!\,.\,x}{(\ln x)^{n+2}} - \frac{(n+1)!\,.\,2}{(\ln 2)^{n+2}} + R_{n+1}(x)$$

On a vu que $R_{n+1}(x) = \underset{x\to+\infty}{o}(R_n(x))$, de plus $\dfrac{(n+1)!\,.\,2}{(\ln 2)^{n+2}}$ est une constante alors que $R_n(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ car $\dfrac{1}{t} = \underset{t\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{(\ln t)^{n+2}}\right)$ donc $\boxed{R_n(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{(n+1)!\,.\,x}{(\ln x)^{n+2}}}$

d) On en déduit que $R_n(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{(n+1)!\,.\,x}{(\ln x)^{n+2}} = o_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{(\ln x)^{n+1}}\right)$.
Finalement :
$\displaystyle\int_2^x \frac{1}{\ln t}\,dt = \sum_{k=0}^{n}\frac{k!x}{(\ln x)^{k+1}} + o_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{(\ln x)^{n+1}}\right)$

Problème

Partie I - Exemple I

1) On sait que la fonction Arctangente est définie, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et vérifie $\text{Arctan}(0) = 0$ donc $f \in E_0$. De plus $\lim\limits_{t\to 0^+} \frac{f(t)}{t} = f'(0) = 1$ d'où la fonction $g : t \mapsto \left(\frac{f(t)}{t}\right)^2$ est prolongeable par continuité en 0 et $0 \leqslant g(t) \sim_{+\infty} \frac{\pi^2}{4t^2}$, donc la fonction g est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et donc $\boxed{f \in E_1}$.

2) Pour tout $x > 0$, la fonction $H_x : t \mapsto \frac{1}{(t^2+1)(t^2+x^2)}$ est positive et continue sur $\mathbb{R}^+$ avec $H_x(t) \leqslant \frac{1}{x^2(1+t^2)}$, cette dernière fonction est intégrable sur $[1, +\infty[$ pour tout $x > 0$ donc pour tout $x > 0$, H_x est $\boxed{\text{intégrable sur } \mathbb{R}^+}$. On remarque que $\forall t \in \mathbb{R}^+$, $\boxed{(f'(t))^2 = H_1(t)}$, donc $\boxed{f \in E_2}$.

3) a) On considère la fonction φ définie sur $]1, +\infty[$ par $\varphi : u \mapsto \int_{\mathbb{R}_+^*} H_u(t)dt$. On va appliquer la version continue du théorème de convergence dominée par calculer $\lim\limits_{u\to 1^+} \varphi(u)$.

— Pour tout $u \in]1, +\infty[, t \mapsto H_u(t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$.

— Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $\lim\limits_{u\to 1^+} H_u(t) = \frac{1}{(tr+1)^2} = H_1(t)$ et $t \mapsto H_1(t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$.

— Domination : pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $u \in]1, +\infty[$,

$$|H_u(t)| = \frac{1}{(t^2+1)(t^2+u^2)} \leqslant \frac{1}{1+t^2}$$

Or $\psi : t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et $\frac{1}{1+t^2} \sim_{+\infty} \frac{1}{t^2}$ donc ψ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$

D'après le théorème de convergence dominée,

$$\lim_{u\to 1^+} \varphi(u) = \lim_{u\to 1^+} \int_{\mathbb{R}_+^*} H_u(t)dt = \int_{\mathbb{R}_+^*} H_1(t)dt = \varphi(1)$$

b) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*, x \neq 1$, par décomposition en éléments simples (deux pôles simples :$-1, -x^2$)

$$\frac{1}{(T+1)(T+x^2)} = \boxed{\frac{1}{x^2-1}\left(\frac{1}{T+1} - \frac{1}{T+x^2}\right)}$$

c) D'après la décomposition en éléments simples précédente, pour $x \in \mathbb{R}_+^*, x \neq 1$, on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, H_x(t) = \frac{1}{x^2-1}\left(\frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{t^2+x^2}\right)$$

On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*, x \neq 1$, on a :

$$\varphi(x) = \frac{1}{x^2-1}\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{t^2+x^2}\right)dt = \frac{1}{x^2-1}\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{x}\frac{1/x}{1+(t/x)^2}\right)dt$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{x^2-1}\lim_{b\to+\infty}\left[\arctan(t) - \frac{1}{x}\arctan(\frac{t}{x})\right]_0^b = \frac{1}{x^2-1}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2x}\right) = \boxed{\frac{\pi}{2x(1+x)}}$$

d) Par définition de $N_2(f)$ avec $(f'(t))^2 = H_1(t)$ on a : $N_2(f) = \sqrt{\varphi(1)}$ d'après la question 3.a) on aura : $\boxed{N_2(f) = \sqrt{\lim_{x\to 1^+} \varphi(x)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$.

4) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, la fonction $G_x : t \mapsto \dfrac{\arctan(xt)}{t(t^2+1)}$ est positive et continue sur $\mathbb{R}_+^*$ avec $G_x(t) \sim_0 x$ et $G_x(t) \sim_{+\infty} \dfrac{\pi}{2t^3}$, on en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $\boxed{G_x \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}_+^*}$.

5) Calcul de $N_1(f)$.
Pour $x \in \mathbb{R}^+$, on pose $\theta(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}_+^*} G_x(t)dt$ et $G : (x,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}_+^* \mapsto G_x(t)$.

a) D'après la formule admise, $\forall x \in \mathbb{R}^+, \theta'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)(1+x^2t^2)}dt.$

Pour $x > 0$, on aura donc $\theta'(x) = \dfrac{1}{x^2}\displaystyle\int_0^{+\infty} H_{\frac{1}{x}}(t)dt = \frac{1}{x^2}\varphi\left(\frac{1}{x}\right) = \boxed{\frac{\pi}{2(x+1)}}$ d'après le résultat de la question 3b.

Par continuité en 0 de θ', la formule est encore vraie pour $x = 0$.

b) On déduit du résultat précédent que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$,
$\theta(x) = \theta(0) + \dfrac{\pi}{2}\ln(1+x) = \boxed{\frac{\pi}{2}\ln(1+x)}$.

c) $N_1^2(f) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f^2(t)}{t^2}dt$. Par intégration par parties avec $f(t) = \arctan(t)$, on aura :

$$\int_0^{+\infty} \frac{f^2(t)}{t^2}dt = \left[-\frac{f^2(t)}{t}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{2f'(t)f(t)}{t}dt$$

où le crochet converge car $\lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{f^2(t)}{t} = \lim\limits_{t\to 0^+} \arctan(t)\dfrac{\arctan(t)}{t} = 0$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{\arctan^2(t)}{t} = 0$, on en déduit que :

$$N_1^2(f) = \int_0^{+\infty} \frac{2\arctan(t)}{t(1+t^2)}dt = 2\theta(1) = \pi\ln(2)$$

d) On en déduit que $\boxed{N_1(f) = \sqrt{\pi\ln(2)} \text{ et donc } \frac{N_1(f)}{N_2(f)} = 2\sqrt{\ln(2)}}$.

Partie II - Exemple 2

6) f est clairement dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et on a : $\forall t \in \mathbb{R}^+$, $\boxed{f'(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}}$. On en déduit que f' est continue sur $\mathbb{R}^+$ et f'^2 est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ (car équivalente à $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ à l'infini) donc $\boxed{f \in E_2}$.
De plus $\boxed{N_2(f) = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}}$.

7) Pour t au voisinage de 0, on a (par développement limité à l'ordre 1 au voisinage de 0 de $\sqrt{1+t^2}$) : $\ln(t + \sqrt{1+t^2}) = \ln(1 + t + o(t)) = t + o(t)$ alors $\boxed{f(t) \sim_0 t}$.
On a aussi au voisinage de $+\infty$:

$$f(t) = \ln(t) + \ln(1 + \sqrt{1 + 1/t^2}) = \ln(t) + \ln(2 + o(1)) = \ln(t) + O(1)$$

on en déduit que $\boxed{f(t) \sim_{+\infty} \ln(t)}$.

8) D'après les équivalents précédents, $t \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \dfrac{f^2(t)}{t^2}$ est prolongeable par continuité en 0 et $\dfrac{f^2(t)}{t^2} =_{+\infty} o\left(\dfrac{1}{t^{3/2}}\right)$ et donc $\boxed{f \in E_1}$.

9) Calcul d'une intégrale.

a) La fonction $h : t \mapsto -\dfrac{\ln(t)}{1-t^2}$ est continue, positive sur $]0,1[$ et est prolongeable par continuité en 1 (de limite égale à $1/2$). De plus au voisinage de 0, on a : $h(t) = o(1/\sqrt{t})$ et donc $\boxed{h \text{ est intégrable sur }]0,1[}$.

$$\text{On note désormais } J = \int_{]0,1[} \frac{-\ln t}{1-t^2} dt.$$

b) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f_k : t \mapsto -t^{2k}\ln(t)$ est continue et positive sur $]0,1]$ avec $f_k(t) = o(1/\sqrt{t})$ au voisinage de 0, on en déduit que pour tout $k \in \mathbb{N}$, les fonctions f_k sont intégrables sur $]0,1[$. Par intégration par parties,

$$\int_0^1 -t^{2k}\ln(t)dt = \left[-t^{2k+1}\ln(t)/(2k+1)\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{t^{2k}}{2k+1}dt$$

car le crochet converge. Donc : $\boxed{J_k = \dfrac{1}{(2k+1)^2}}$.

c) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, les fonctions f_k sont continues et intégrables sur $]0,1[$, la série de fonctions $\sum f_k$ converge simplement sur $]0,1[$ vers $h : t \in]0,1[\mapsto -\dfrac{\ln(t)}{1-t^2}$, la série $\sum \int_{]0,1[} |f_k| = \sum J_k$ converge donc h est intégrable sur $]0,1[$ et

$$J = \int_0^1 h(t)dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^1 f_k(t)dt = \boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} J_k}.$$

d) On a :

$$\frac{\pi^2}{6} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{2N+1} \frac{1}{n^2} = \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{(2k+1)^2}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

On en déduit que $J = \sum_{k=0}^{+\infty} J_k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \boxed{\frac{\pi^2}{8}}$.

10) Calcul de $N_1(f)$.

Pour simplifier, on note $I = (N_1(f))^2 = \int_{\mathbb{R}_+} \left(\frac{f(t)}{t}\right)^2 dt$.

a) On a par intégration par parties :

$$\int_0^{+\infty} \frac{f^2(t)}{t^2} dt = \left[-\frac{f^2(t)}{t}\right]_0^\infty + \int_0^\infty \frac{2f'(t)f(t)}{t} dt$$

car le crochet converge : on a déjà vu : $t \mapsto \frac{f(t)}{t}$ est prolongeable par continuité en 0 donc $\lim_{a\to 0^+} \frac{f^2(t)}{t} = \lim_{a\to 0^+} t\left(\frac{f(t)}{t}\right)^2 = 0$, on avait aussi (voir question 7) :
$f(t) \underset{+\infty}{\sim} \ln(t)$ et donc $\frac{f^2(t)}{t} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln^2(t)}{t}$ et donc $\lim_{t\to+\infty} \frac{f^2(t)}{t} = 0$.
On en déduit que :

$$I = 2\int_0^\infty \frac{f'(t)f(t)}{t} dt = \boxed{2\int_0^\infty \frac{f(t)}{t\sqrt{1+t^2}dt}}$$

b) La fonction f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ (car $f' > 0$) donc réalise une $\boxed{\text{bijection de }]0,+\infty[\text{ vers }]\lim_0 f, \lim_\infty f[=]0,\infty[}$.
Soit $t \geqslant 0$ et $u = f(t)$.
On a $e^u = t + \sqrt{t^2+1}$ et $e^{-u} = \frac{t-\sqrt{t^2+1}}{t^2-(t^2+1)} = \sqrt{t^2+1} - t$ d'où

$$\boxed{\mathrm{sh}(u) = \frac{e^u - e^{-u}}{2} = t = f^{-1}(u)}$$

c) Pour le calcul de I, on effectue le changement de variable $u = f(t)$ sachant que f est de classe $\mathscr{C}^1$ et strictement croissante

$$I = 2\int_0^\infty \frac{f(t)f'(t)dt}{t} = \boxed{2\int_0^{+\infty} \frac{udu}{\mathrm{sh}(u)}}$$

d)

$$I = 4\int_0^\infty \frac{u\,du}{e^u - e^{-u}} = 4\int_0^\infty \frac{ue^{-u}du}{1-e^{-2u}}$$

On effectue alors dans I le changement de variable $v = e^{-u}$, $dv = -e^{-u}du$ avec $\psi : u \mapsto v$ de classe $\mathscr{C}^1$, strictement décroissante et bijective de $]0,+\infty[$ dans $]0,1[$. Ainsi :

$$I = 4\int_1^0 -\frac{(-\ln(v))(-dv)}{1-v^2} = 4J = \frac{\pi^2}{2}$$

On en déduit que $\boxed{N_1(f) = \sqrt{I} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}}$ et $\boxed{\frac{N_1(f)}{N_2(f)} = \sqrt{\pi}}$.

Partie III

11) Soit f une fonction quelconque appartenant à E_0. On associe à f deux fonctions g et h définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g(t)=\dfrac{f(t)}{\sqrt{t}}$ et $h(t)=\dfrac{f(t)}{t}$ pour tout $t>0$. On pose $\alpha=f'(0)$.

a) f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ avec $f(0)=0$ donc $f(t)=f(t)-f(0)$ et donc h est prolongeable par continuité en 0 avec $\boxed{\lim\limits_{t\to 0^+} h(t)=f'(0)=\alpha}$. On a : $g(t)=\sqrt{t}h(t)$ et donc $\boxed{\lim\limits_{t\to 0^+} g(t)=0}$.

b) On vérifie aisément par dérivation d'un quotient que :

$$\boxed{\forall t>0, \sqrt{t}g'(t)=f'(t)-\frac{1}{2}h(t)}.$$

c) On déduit des questions précédentes, par continuité de f' en 0, que $\lim\limits_{t\to 0^+}\sqrt{t}g'(t)=\boxed{\dfrac{\alpha}{2}}$, de plus $g(t)g'(t)=h(t)\sqrt{t}g'(t)$, donc $\lim\limits_{t\to 0^+} g(t)g'(t)=\boxed{\dfrac{\alpha^2}{2}}$.

d) Des limites calculées précédemment, on obtient que $t\mapsto\sqrt{t}g'(t), t\mapsto g(t)g'(t), t\mapsto h(t)$ sont prolongeables par continuité en 0^+, or elles sont aussi continues sur $\mathbb{R}_+^*$, donc pour tout $x>0$, ces trois fonctions sont intégrables sur $]0,x]$. On a aussi $f'^2(t)=g(t)g'(t)+(\sqrt{t}g'(t))^2+\frac{1}{4}h^2(t)$ alors si $f\in E_2$, f'^2 est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et donc sur $]0,x]$ pour tout $x>0$, alors par intégration sur $]0,x]$ et linéarité de l'intégrale, on aura :

$$\boxed{(R)\quad \int_{]0,x]}\left(f'(t)\right)^2 dt=\frac{1}{2}\left(g(x)\right)^2+\int_{]0,x]}\left(\sqrt{t}g'(t)\right)^2 dt+\frac{1}{4}\int_{]0,x]}\left(h(t)\right)^2 dt}.$$

car $\int_{]0,x]}(g^2)'=[g^2]_0^x=g^2(x)$ car $\lim_0 g=0$ (cf question a) et car g est de classe $\mathcal{C}^1$, donc le théorème fondamental de l'analyse s'applique.

12) Comparaison de E_1 et E_2.

a) Par positivité de l'intégrale d'une fonction positive sur un intervalle, la relation (R) entraine :

$$\forall x>0,\quad \int_{]0,x]}\left(f'(t)\right)^2 dt\geqslant\frac{1}{4}\int_{]0,x]}\left(h(t)\right)^2 dt$$

On en déduit que si $f\in E_2$ alors $x\mapsto\displaystyle\int_{]0,x]}\left(f'(t)\right)^2 dt$ est majorée, ainsi la fonction $x\in\mathbb{R}_+^*\mapsto\displaystyle\int_{]0,x]}\left(h(t)\right)^2 dt$ est majorée et donc la fonction positive, continue h^2 est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc si $f\in E_2$ alors $f\in E_1$, d'où l'inclusion : $\boxed{E_2\subset E_1}$.

b) Prenons la fonction $f\,:\,t\mapsto\sin(t)$, il est clair que $f\in E_0$, de plus $\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{f^2(t)}{t^2}=1$ et $\forall t>0,\ 0\leqslant\dfrac{f^2(t)}{t^2}\leqslant\dfrac{1}{t^2}$, on en déduit que $f\in E_1$, mais $f'(t)=\cos(t)$ et la fonction positive f'^2 n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}^+$ car

$$\int_0^x f'^2(t)dt=\int_0^x\frac{1+\cos 2t}{2}dt=\frac{x}{2}+O(1)\text{ tend vers }+\infty\text{ quand }x\to+\infty.$$

On en déduit qu'il y a une inclusion stricte entre E_2 et E_1 et ainsi $\boxed{E_1\neq E_2}$.