Calculatrices interdites.
L'exercice et le problème sont indépendants. L'énoncé comporte quatre pages.

Exercice

1) a) À l'aide d'un intégration par parties, montrer que

$$\int_2^x \frac{1}{\ln t}\,dt = \frac{x}{\ln x} + c_0 + R_0(x)$$

où R_0 est une fonction de la forme $R_0 : x \mapsto \displaystyle\int_2^x g_0(t)dt$ et c_0 une constante réelle. On explicitera la fonction g_0.

b) Montrer que $R_0(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\displaystyle\int_2^x \frac{1}{\ln t}\,dt\right)$.

c) En déduire un équivalent simple de $\displaystyle\int_2^x \frac{1}{\ln t}\,dt$ quand $x \to +\infty$.

2) a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $x > 2$, écrire $\displaystyle\int_2^x \frac{1}{\ln t}\,dt$ sous la forme :

$$\int_2^x \frac{1}{\ln t}\,dt = \sum_{k=0}^{n} \frac{k!x}{(\ln x)^{k+1}} + c_n + R_n(x)$$

où R_n est une fonction de la forme $R_n : x \mapsto \displaystyle\int_2^x g_n(t)dt$ et c_n une constante réelle. On explicitera la fonction g_n.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R_{n+1}(x) \underset{x\to+\infty}{=} o(R_n(x))$.

c) En déduire un équivalent simple de $R_n(x)$ quand $x \to +\infty$ (n est fixé).

d) En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_2^x \frac{1}{\ln t}\,dt = \sum_{k=0}^{n} \frac{k!x}{(\ln x)^{k+1}} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{x}{(\ln x)^{n+1}}\right)$$

Problème

Soit E_0 le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions f définies sur $\mathbb{R}_+$, à valeurs réelles, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et vérifiant $f(0) = 0$.

Soit E_1 l'ensemble des fonctions f appartenant à E_0 et telles que la fonction $t \mapsto \left(\dfrac{f(t)}{t}\right)^2$ soit intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Soit E_2 l'ensemble des fonctions f appartenant à E_0 et telles que la fonction $t \mapsto (f'(t))^2$ soit intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

On note

$$N_1(f) = \left[\int_{\mathbb{R}_+^*} \left(\frac{f(t)}{t}\right)^2 \, \mathrm{d}t\right]^{1/2} \text{ pour } f \in E_1\,;\ N_2(f) = \left[\int_{\mathbb{R}_+} (f'(t))^2 \, \mathrm{d}t\right]^{1/2} \text{ pour } f \in E_2.$$

Partie I - Exemple I

Dans cette partie on suppose que f est la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f : t \mapsto \operatorname{Arctan}(t)$.

1) Montrer que f appartient à E_1.
2) Montrer que, pour tout $u \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction $H_u : t \mapsto \dfrac{1}{(t^2+1)(t^2+u^2)}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et qu'en particulier f appartient à E_2.
3) On veut calculer $N_2(f)$. Pour $u \in \mathbb{R}_+^*$, on note $\varphi(u) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}_+} H_u(t) \, \mathrm{d}t$.
   a) Montrer que $\displaystyle\lim_{u \to 1^+} \varphi(u) = \varphi(1)$.
   On pourra utiliser le théorème de convergence dominée.
   b) Soit $u \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$; décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $\dfrac{1}{(T+1)(T+u^2)}$ d'indéterminée T.
   c) En déduire l'expression explicite de $\varphi(u)$ pour $u \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$.
   Ne pas se tromper, le résultat trouvé resservira plus tard.
   d) Quelle est la valeur de $N_2(f)$?
4) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, la fonction $G_x : t \mapsto \dfrac{\operatorname{Arctan}(xt)}{t\,(t^2+1)}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.
5) On veut calculer $N_1(f)$. Pour $x \in \mathbb{R}_+$ on pose $\theta(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}_+^*} G_x(t) \, \mathrm{d}t$.
   On admet que θ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et que pour $x \in \mathbb{R}_+$,
   $$\theta'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)(1+(xt)^2)}$$
   a) Expliciter $\theta'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}_+$.
   On pourra commencer par exprimer, pour x non nul, $\theta'(x)$ à l'aide de φ.
   b) Expliciter $\theta(x)$ pour $x \in \mathbb{R}_+$.
   c) Établir une relation entre $[N_1(f)]^2$ et $\theta(1)$.
   d) En déduire la valeur de $N_1(f)$ et celle de $\dfrac{N_1(f)}{N_2(f)}$.

Partie II - Exemple 2

Dans cette partie on suppose que f est la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f : t \mapsto \ln\left(t + \sqrt{t^2+1}\right).$$

6) Calculer $f'(t)$ pour $t \in \mathbb{R}_+$.

   Ne pas se tromper, le résultat trouvé resservira plus tard.

   En déduire que f est élément de E_2. Quelle est la valeur de $N_2(f)$?

7) Déterminer un équivalent (simple !) de $f(t)$ lorsque $t \to 0^+$ (respectivement lorsque $t \to +\infty$).

8) Montrer que f appartient à E_1.

9) Calcul d'une intégrale.

   a) Montrer que la fonction $t \mapsto -\dfrac{\ln t}{1-t^2}$ est intégrable sur l'intervalle $]0,1[$.

   On note désormais $J = \displaystyle\int_{]0,1[} \frac{-\ln t}{1-t^2}\ \mathrm{d}t$.

   b) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction $t \mapsto -t^{2k}\ln t$ est intégrable sur l'intervalle $]0,1[$; expliciter la valeur de $J_k = \displaystyle\int_{]0,1[} \left(-t^{2k}\ln t\right)\ \mathrm{d}t$.

   c) Justifier avec soin l'égalité $J = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} J_k = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{]0,1[} \left(-t^{2k}\ln t\right)\ \mathrm{d}t$.

   d) Déduire de ce qui précède la valeur de l'intégrale J, sachant que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ converge et que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

10) Calcul de $N_1(f)$.

   Pour simplifier on note $I = [N_1(f)]^2 = \displaystyle\int_{\mathbb{R}_+^*} \left(\frac{f(t)}{t}\right)^2\ \mathrm{d}t$.

   a) Montrer que $I = 2\displaystyle\int_{\mathbb{R}_+^*} \frac{f(t)}{t\sqrt{t^2+1}}\ \mathrm{d}t$.

   On rappelle que $\mathrm{sh}(u) = \dfrac{e^u - e^{-u}}{2}$, $\mathrm{ch}(u) = \dfrac{e^u + e^{-u}}{2}$ pour $u \in \mathbb{R}$, et la relation $\mathrm{ch}^2 u - \mathrm{sh}^2 u = 1$.

   b) Justifier que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur lui-même et que sa bijection réciproque est donnée par $f^{-1} : u \mapsto \mathrm{sh}(u)$.

   c) Effectuer le changement de variable $u = f(t) = \ln\left(t + \sqrt{t^2+1}\right)$ dans l'intégrale obtenue dans la question 10.a. On justifiera le changement de variable.

   d) Effectuer alors le changement de variable $v = e^{-u}$ et en déduire la valeur de $N_1(f)$, puis celle de $\dfrac{N_1(f)}{N_2(f)}$. *On pourra utiliser les résultats de la question 9.*

Partie III

Le but de cette partie est de comparer les ensembles E_1 et E_2.

On revient dans cette partie à un cadre général. La lettre f désigne donc une fonction quelconque de E_0 qui n'est pas nécessairement une des deux fonctions étudiées dans les deux premières parties.

11) Soit f une fonction quelconque appartenant à E_0. On associe à f deux fonctions g et h définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g : t \mapsto \dfrac{f(t)}{\sqrt{t}}$ et $h : t \mapsto \dfrac{f(t)}{t}$.

    On pose $\alpha = f'(0)$.

    a) Quelle est la limite de $h(t)$ (respectivement de $g(t)$) quand $t \to 0^+$?

    b) Exprimer $f'(t) - \sqrt{t}g'(t)$ en fonction de $h(t)$ lorsque $t \in \mathbb{R}_+^*$.

    c) Quelle est la limite de $\sqrt{t}g'(t)$ (respectivement de $g(t) \times g'(t)$) lorsque $t \to 0^+$?

    On exprimera les résultats en fonction de $\alpha = f'(0)$.

    d) Établir, pour $x > 0$, la relation :

    $$(R) \ : \quad \int_{]0,x]} (f'(t))^2 \ \mathrm{d}t = \frac{1}{2}(g(x))^2 + \int_{]0,x]} \left(\sqrt{t}g'(t)\right)^2 \ \mathrm{d}t + \frac{1}{4}\int_{]0,x]} (h(t))^2 \ \mathrm{d}t$$

    On commencera par justifier l'intégrabilité sur $]0, x]$ de chacune des fonctions qui interviennent.

12) Comparaison de E_1 et E_2.

    a) Déduire de la relation (R) l'inclusion $E_2 \subset E_1$.

    b) Les ensembles E_1 et E_2 sont-ils égaux ?

    On pourra considérer la fonction $t \mapsto \sin t$.