

Nom : \_\_\_\_\_

## DS 2

Soin) .....  0  1  2  3

1)a) IPP :  $\int_2^x \frac{1}{\ln t} dt = \frac{x}{\ln x} + c_0 + \int_2^x g_0$  ;  $c_0 = -\frac{2}{\ln 2}$  ;  $g_0(t) = \frac{1}{(\ln t)^2}$   0  1  2

1)b)  $R_0 = o_\infty(\int_2^x \frac{1}{\ln t} dt)$  car  $\int_2^x \frac{1}{\ln t} dt$  diverge .....  0  1

et  $\frac{1}{(\ln t)^2} = o(\frac{1}{\ln t})$  .....  0  1

et  $1/\ln$  positive .....  0  1

1)c)  $R_0 \sim_\infty \frac{x}{\ln x}$  .....  0  1

car  $\int \frac{1}{\ln t} - R_0 \sim \int \frac{1}{\ln t}$  .....  0  1

et  $c_0 = o(\frac{x}{\ln x})$  .....  0  1

2)a)  $c_n = -2 \sum_0^n \frac{k!}{(\ln 2)^{k+1}}$  et  $g_n(t) = \frac{(n+1)!}{(\ln t)^{n+2}}$  .....  0  1  2  3

2)b))  $R_{n+1} = o(R_n)$  car  $1/\ln^{n+2} \geq 0$  et  $1/\ln^{n+3} = o_\infty(1/\ln^{n+2})$  .....  0  1

et car  $1/\ln^{n+2}$  non intégrable en  $\infty$  .....  0  1

2)c)  $R_n \sim (n+1)! \frac{x}{(\ln x)^{n+2}}$  .....  0  1  2

2)d)  $\int_2^x \frac{1}{\ln t} = \sum_{k=0}^n \frac{k!x}{(\ln x)^{k+1}} + o_{x \rightarrow +\infty}(\frac{x}{(\ln x)^{n+1}})$  .....  0  1

1)  $\arctan \in E_1$  car s'annule en 0 et  $C^1$  .....  0  1

et  $(\frac{\arctan t}{t})^2$  cpm .....  0  1

et  $(\frac{\arctan t}{t})^2$  intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1

et  $(\frac{\arctan t}{t})^2$  intégrable sur  $[1, +\infty[$  .....  0  1

2)  $H_u : t \mapsto \frac{1}{(t^2+1)(t^2+u)}$  intégrable sur  $[0, \infty[$  car continue sur  $[0, \infty[$  .....  0  1

et  $\sim_\infty 1/t^4$  donc intégrable sur  $[1, \infty[$  .....  0  1

$f' = \frac{1}{1+t^2}$  donc (avec  $u=1$ )  $f \in E_2$  .....  0  1

3)a)  $\varphi(u) \rightarrow \varphi(1)$  en  $1^+$  car  $t \mapsto H_u(t)$  cpm sur  $[0, \infty[$  .....  0  1

et  $H_u(t) \rightarrow H_1(t)$  .....  0  1

majoration indépendante de  $u$  par  $H_1(t)$  ou  $\frac{1}{1+t^2}$  .....  0  1

penser aux valeurs absolues (ou fonction positive) .....  0  1

intégrabilité du majorant .....  0  1

3)b)  $\frac{1}{(T+1)(T+u^2)} = \frac{1}{u^2-1} (\frac{1}{T+1} - \frac{1}{T+u^2})$  .....  0  1

3)c)  $\varphi(x) = \frac{\pi}{2x(x+1)}$  pour  $x \neq 1$  bien simplifiée .....  0  1

pas simplifiée .....  0  1

3)d)  $N_2(f)^2 = \lim_{1+} \varphi$ , citer 3.a .....  0  1

$N_2(f) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$  .....  0  1

4)  $G_x : t \mapsto \frac{\arctan(xt)}{t(t^2+1)}$  intégrable sur  $]0, \infty[$  car cpm .....  0  1

et  $\sim_0 x$  donc intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1

et  $O_\infty(1/t^3)$  sur  $[1, +\infty[$  .....  0  1

équivalent en  $\infty$  faux quand  $x=0$  .....  0  1

5)a)  $x \neq 0$  ;  $\theta'(x) = \frac{1}{x^2} \varphi(\frac{1}{x})$  ou  $x\varphi(x)$  .....  0  1

$\theta'(x) = \frac{\pi}{2(x+1)}$  .....  0  1

$\theta'(0) = \frac{\pi}{2}$  .....  0  1

5)b) TFA .....  0  1

$\theta(x) = \frac{\pi}{2} \ln(1+x) + C$  .....  0  1

$C = 0$  .....  0  1

5)c)  $N_1^2(f) = 2\theta(1)$  par IPP .....  0  1  2  3

5)d)  $N_1(f) = \sqrt{\pi \ln(2)}$  .....  0  1

$\frac{N_1(f)}{N_2(f)} = 2\sqrt{\ln(2)}$  .....  0  1

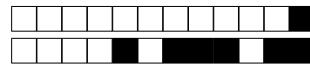
6)  $f'(t) = \frac{1+\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}}{t+\sqrt{t^2+1}}$  .....  0  1

$f'(t) = 1/(\sqrt{t^2+1})$  .....  0  1

$f \in E_1$  car  $f \in C^1([0, +\infty[)$  .....  0  1

et car  $f(0)=0$  .....  0  1

et car  $\int f'^2$  cv,  $N_2(f) = \sqrt{\pi/2}$  .....  0  1



- 7)  $f(t) \sim_0 t$  .....  0  1  
 $f(t) \sim_\infty \ln t$  .....  0  1  2

- 8)  $f \in E_1$  car  $t \mapsto (\frac{f(t)}{t})^2 \sim_0 1$  intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1  
et  $\sim_\infty \frac{\ln^2 t}{t^2}$  intégrable sur  $[1, +\infty[$  .....  0  1

- 9)a)  $-\ln t/(1-t^2)$  intégrable sur  $]0, 1[$  car cpm .....  0  1  
et  $\sim_0 -\ln t = 0(1/\sqrt{t})$  intégrable sur  $]0, \frac{1}{2}]$  .....  0  1  
et  $\sim_1 -(t-1)/(1-t^2) = 1/(t+1) \sim_1 1/2$  intégrable sur  $[\frac{1}{2}, 1[$  .....  0  1

- 9)b)  $-t^{2k} \ln t$  intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1  
 $\int = \frac{1}{(2k+1)^2}$  .....  0  1  2

- 9)c)  $J = \sum_0^\infty \int$  car  $\sum \int |.|$  converge .....  0  1  
et  $\sum -t^{2k} \ln t = -\frac{\ln t}{1-t^2}$  .....  0  1  
rappel des autres hypothèses .....  0  1

- 9)d)  $J = \pi^2/8$  .....  0  1  
justification .....  0  1

- 10)a)  $I = 2 \int \frac{f(t)}{t\sqrt{t^2+1}}$  .....  0  1  2

- 10)b)  $f$  bijective de  $\mathbb{R}_+^*$  dans  $\mathbb{R}_+^*$  ;  $f^{-1} = \text{sh}$  .....  0  1  2  3

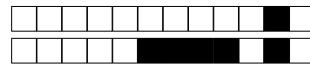
- 10)c) Justification cdv .....  0  1  
 $I = 2 \int \frac{u}{\text{sh} u}$  .....  0  1

- 10)d)  $I = 4J$  .....  0  1  
 $N_1(f) = \pi/\sqrt{2}$  .....  0  1  
 $\frac{N_1(f)}{N_2(f)} = \sqrt{\pi}$  .....  0  1
- 

- 11)a)  $h \rightarrow_0 \alpha$  .....  0  1  
 $g \rightarrow_0 0$  .....  0  1

- 11)b)  $f'(t) - \sqrt{t}g'(t) = h(t)/2$  .....  0  1  
11)c)  $\sqrt{t}g'(t) \rightarrow_0 \alpha/2$  .....  0  1

- $gg' \rightarrow_0 \alpha^2/2$  .....  0  1  
11)d)  $\int (f')^2 = g^2/2 + \int (\sqrt{t}g')^2 + \frac{1}{4} \int h^2$  .....  0  1  2  
justification des intégrabilités .....  0  1  
12)a)  $E_2 \subset E_1$  .....  0  1  2  
13)b)  $\sin \in E_1$  .....  0  1  2  
 $\sin \notin E_2$  .....  0  1  2  3  
..... .....  0  1  
..... .....  0  1  
..... .....  0  1



Nom : \_\_\_\_\_

## DS 2

Soin) .....  0  1  2  3

1)a) IPP :  $\int_2^x \frac{1}{\ln t} dt = \frac{x}{\ln x} + c_0 + \int_2^x g_0$  ;  $c_0 = -\frac{2}{\ln 2}$  ;  $g_0(t) = \frac{1}{(\ln t)^2}$   0  1  2

1)b)  $R_0 = o_\infty(\int_2^x \frac{1}{\ln t} dt)$  car  $\int_2^x \frac{1}{\ln t} dt$  diverge .....  0  1

et  $\frac{1}{(\ln t)^2} = o(\frac{1}{\ln t})$  .....  0  1

et  $1/\ln$  positive .....  0  1

1)c)  $R_0 \sim_\infty \frac{x}{\ln x}$  .....  0  1

car  $\int \frac{1}{\ln t} - R_0 \sim \int \frac{1}{\ln t}$  .....  0  1

et  $c_0 = o(\frac{x}{\ln x})$  .....  0  1

2)a)  $c_n = -2 \sum_0^n \frac{k!}{(\ln 2)^{k+1}}$  et  $g_n(t) = \frac{(n+1)!}{(\ln t)^{n+2}}$  .....  0  1  2  3

2)b))  $R_{n+1} = o(R_n)$  car  $1/\ln^{n+2} \geq 0$  et  $1/\ln^{n+3} = o_\infty(1/\ln^{n+2})$  .....  0  1

et car  $1/\ln^{n+2}$  non intégrable en  $\infty$  .....  0  1

2)c)  $R_n \sim (n+1)! \frac{x}{(\ln x)^{n+2}}$  .....  0  1  2

2)d)  $\int_2^x \frac{1}{\ln t} = \sum_{k=0}^n \frac{k!x}{(\ln x)^{k+1}} + o_{x \rightarrow +\infty}(\frac{x}{(\ln x)^{n+1}})$  .....  0  1

1)  $\arctan \in E_1$  car s'annule en 0 et  $C^1$  .....  0  1

et  $(\frac{\arctan t}{t})^2$  cpm .....  0  1

et  $(\frac{\arctan t}{t})^2$  intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1

et  $(\frac{\arctan t}{t})^2$  intégrable sur  $[1, +\infty[$  .....  0  1

2)  $H_u : t \mapsto \frac{1}{(t^2+1)(t^2+u)}$  intégrable sur  $[0, \infty[$  car continue sur  $[0, \infty[$  .....  0  1

et  $\sim_\infty 1/t^4$  donc intégrable sur  $[1, \infty[$  .....  0  1

$f' = \frac{1}{1+t^2}$  donc (avec  $u=1$ )  $f \in E_2$  .....  0  1

3)a)  $\varphi(u) \rightarrow \varphi(1)$  en  $1^+$  car  $t \mapsto H_u(t)$  cpm sur  $[0, \infty[$  .....  0  1

et  $H_u(t) \rightarrow H_1(t)$  .....  0  1

majoration indépendante de  $u$  par  $H_1(t)$  ou  $\frac{1}{1+t^2}$  .....  0  1

penser aux valeurs absolues (ou fonction positive) .....  0  1

intégrabilité du majorant .....  0  1

3)b)  $\frac{1}{(T+1)(T+u^2)} = \frac{1}{u^2-1} (\frac{1}{T+1} - \frac{1}{T+u^2})$  .....  0  1

3)c)  $\varphi(x) = \frac{\pi}{2x(x+1)}$  pour  $x \neq 1$  bien simplifiée .....  0  1

pas simplifiée .....  0  1

3)d)  $N_2(f)^2 = \lim_{1+} \varphi$ , citer 3.a .....  0  1

$N_2(f) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$  .....  0  1

4)  $G_x : t \mapsto \frac{\arctan(xt)}{t(t^2+1)}$  intégrable sur  $]0, \infty[$  car cpm .....  0  1

et  $\sim_0 x$  donc intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1

et  $O_\infty(1/t^3)$  sur  $[1, +\infty[$  .....  0  1

équivalent en  $\infty$  faux quand  $x=0$  .....  0  1

5)a)  $x \neq 0$  ;  $\theta'(x) = \frac{1}{x^2} \varphi(\frac{1}{x})$  ou  $x\varphi(x)$  .....  0  1

$\theta'(x) = \frac{\pi}{2(x+1)}$  .....  0  1

$\theta'(0) = \frac{\pi}{2}$  .....  0  1

5)b) TFA .....  0  1

$\theta(x) = \frac{\pi}{2} \ln(1+x) + C$  .....  0  1

$C = 0$  .....  0  1

5)c)  $N_1^2(f) = 2\theta(1)$  par IPP .....  0  1  2  3

5)d)  $N_1(f) = \sqrt{\pi \ln(2)}$  .....  0  1

$\frac{N_1(f)}{N_2(f)} = 2\sqrt{\ln(2)}$  .....  0  1

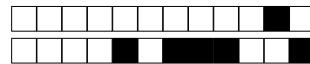
6)  $f'(t) = \frac{1+\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}}{t+\sqrt{t^2+1}}$  .....  0  1

$f'(t) = 1/(\sqrt{t^2+1})$  .....  0  1

$f \in E_1$  car  $f \in C^1([0, +\infty[)$  .....  0  1

et car  $f(0)=0$  .....  0  1

et car  $\int f'^2$  cv,  $N_2(f) = \sqrt{\pi/2}$  .....  0  1



- 7)  $f(t) \sim_0 t$  .....  0  1  
 $f(t) \sim_\infty \ln t$  .....  0  1  2

- 8)  $f \in E_1$  car  $t \mapsto (\frac{f(t)}{t})^2 \sim_0 1$  intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1  
et  $\sim_\infty \frac{\ln^2 t}{t^2}$  intégrable sur  $[1, +\infty[$  .....  0  1

- 9)a)  $-\ln t/(1-t^2)$  intégrable sur  $]0, 1[$  car cpm .....  0  1  
et  $\sim_0 -\ln t = 0(1/\sqrt{t})$  intégrable sur  $]0, \frac{1}{2}]$  .....  0  1  
et  $\sim_1 -(t-1)/(1-t^2) = 1/(t+1) \sim_1 1/2$  intégrable sur  $[\frac{1}{2}, 1[$  .....  0  1

- 9)b)  $-t^{2k} \ln t$  intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1  
 $\int = \frac{1}{(2k+1)^2}$  .....  0  1  2

- 9)c)  $J = \sum_0^\infty \int$  car  $\sum \int |.|$  converge .....  0  1  
et  $\sum -t^{2k} \ln t = -\frac{\ln t}{1-t^2}$  .....  0  1  
rappel des autres hypothèses .....  0  1

- 9)d)  $J = \pi^2/8$  .....  0  1  
justification .....  0  1

- 10)a)  $I = 2 \int \frac{f(t)}{t\sqrt{t^2+1}}$  .....  0  1  2

- 10)b)  $f$  bijective de  $\mathbb{R}_+^*$  dans  $\mathbb{R}_+^*$  ;  $f^{-1} = \text{sh}$  .....  0  1  2  3

- 10)c) Justification cdv .....  0  1  
 $I = 2 \int \frac{u}{\text{sh} u}$  .....  0  1

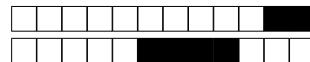
- 10)d)  $I = 4J$  .....  0  1  
 $N_1(f) = \pi/\sqrt{2}$  .....  0  1  
 $\frac{N_1(f)}{N_2(f)} = \sqrt{\pi}$  .....  0  1
- 

- 11)a)  $h \rightarrow_0 \alpha$  .....  0  1  
 $g \rightarrow_0 0$  .....  0  1

- 11)b)  $f'(t) - \sqrt{t}g'(t) = h(t)/2$  .....  0  1

- 11)c)  $\sqrt{t}g'(t) \rightarrow_0 \alpha/2$  .....  0  1

- $gg' \rightarrow_0 \alpha^2/2$  .....  0  1  
11)d)  $\int (f')^2 = g^2/2 + \int (\sqrt{t}g')^2 + \frac{1}{4} \int h^2$  .....  0  1  2  
justification des intégrabilités .....  0  1  
12)a)  $E_2 \subset E_1$  .....  0  1  2  
13)b)  $\sin \in E_1$  .....  0  1  2  
 $\sin \notin E_2$  .....  0  1  2  3  
..... .....  0  1  
..... .....  0  1  
..... .....  0  1



Nom : \_\_\_\_\_

## DS 2

Soin) .....  0  1  2  3

1)a) IPP :  $\int_2^x \frac{1}{\ln t} dt = \frac{x}{\ln x} + c_0 + \int_2^x g_0$  ;  $c_0 = -\frac{2}{\ln 2}$  ;  $g_0(t) = \frac{1}{(\ln t)^2}$   0  1  2

1)b)  $R_0 = o_\infty(\int_2^x \frac{1}{\ln t} dt)$  car  $\int_2^x \frac{1}{\ln t} dt$  diverge .....  0  1

et  $\frac{1}{(\ln t)^2} = o(\frac{1}{\ln t})$  .....  0  1

et  $1/\ln$  positive .....  0  1

1)c)  $R_0 \sim_\infty \frac{x}{\ln x}$  .....  0  1

car  $\int \frac{1}{\ln t} - R_0 \sim \int \frac{1}{\ln t}$  .....  0  1

et  $c_0 = o(\frac{x}{\ln x})$  .....  0  1

2)a)  $c_n = -2 \sum_{k=0}^n \frac{k!}{(\ln 2)^{k+1}}$  et  $g_n(t) = \frac{(n+1)!}{(\ln t)^{n+2}}$  .....  0  1  2  3

2)b))  $R_{n+1} = o(R_n)$  car  $1/\ln^{n+2} \geq 0$  et  $1/\ln^{n+3} = o_\infty(1/\ln^{n+2})$  .....  0  1

et car  $1/\ln^{n+2}$  non intégrable en  $\infty$  .....  0  1

2)c)  $R_n \sim (n+1)! \frac{x}{(\ln x)^{n+2}}$  .....  0  1  2

2)d)  $\int_2^x \frac{1}{\ln t} = \sum_{k=0}^n \frac{k!x}{(\ln x)^{k+1}} + o_{x \rightarrow +\infty}(\frac{x}{(\ln x)^{n+1}})$  .....  0  1

1)  $\arctan \in E_1$  car s'annule en 0 et  $C^1$  .....  0  1

et  $(\frac{\arctan t}{t})^2$  cpm .....  0  1

et  $(\frac{\arctan t}{t})^2$  intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1

et  $(\frac{\arctan t}{t})^2$  intégrable sur  $[1, +\infty[$  .....  0  1

2)  $H_u : t \mapsto \frac{1}{(t^2+1)(t^2+u)}$  intégrable sur  $[0, \infty[$  car continue sur  $[0, \infty[$  .....  0  1

et  $\sim_\infty 1/t^4$  donc intégrable sur  $[1, \infty[$  .....  0  1

$f' = \frac{1}{1+t^2}$  donc (avec  $u = 1$ )  $f \in E_2$  .....  0  1

3)a)  $\varphi(u) \rightarrow \varphi(1)$  en  $1^+$  car  $t \mapsto H_u(t)$  cpm sur  $[0, \infty[$  .....  0  1

et  $H_u(t) \rightarrow H_1(t)$  .....  0  1

majoration indépendante de  $u$  par  $H_1(t)$  ou  $\frac{1}{1+t^2}$  .....  0  1

penser aux valeurs absolues (ou fonction positive) .....  0  1

intégrabilité du majorant .....  0  1

3)b)  $\frac{1}{(T+1)(T+u^2)} = \frac{1}{u^2-1} (\frac{1}{T+1} - \frac{1}{T+u^2})$  .....  0  1

3)c)  $\varphi(x) = \frac{\pi}{2x(x+1)}$  pour  $x \neq 1$  bien simplifiée .....  0  1

pas simplifiée .....  0  1

3)d)  $N_2(f)^2 = \lim_{1+} \varphi$ , citer 3.a .....  0  1

$N_2(f) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$  .....  0  1

4)  $G_x : t \mapsto \frac{\arctan(xt)}{t(t^2+1)}$  intégrable sur  $]0, \infty[$  car cpm .....  0  1

et  $\sim_0 x$  donc intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1

et  $O_\infty(1/t^3)$  sur  $[1, +\infty[$  .....  0  1

équivalent en  $\infty$  faux quand  $x = 0$  .....  0  1

5)a)  $x \neq 0$  ;  $\theta'(x) = \frac{1}{x^2} \varphi(\frac{1}{x})$  ou  $x\varphi(x)$  .....  0  1

$\theta'(x) = \frac{\pi}{2(x+1)}$  .....  0  1

$\theta'(0) = \frac{\pi}{2}$  .....  0  1

5)b) TFA .....  0  1

$\theta(x) = \frac{\pi}{2} \ln(1+x) + C$  .....  0  1

$C = 0$  .....  0  1

5)c)  $N_1^2(f) = 2\theta(1)$  par IPP .....  0  1  2  3

5)d)  $N_1(f) = \sqrt{\pi \ln(2)}$  .....  0  1

$\frac{N_1(f)}{N_2(f)} = 2\sqrt{\ln(2)}$  .....  0  1

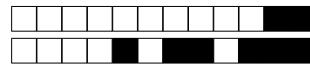
6)  $f'(t) = \frac{1+\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}}{t+\sqrt{t^2+1}}$  .....  0  1

$f'(t) = 1/(\sqrt{t^2+1})$  .....  0  1

$f \in E_1$  car  $f \in C^1([0, +\infty[)$  .....  0  1

et car  $f(0) = 0$  .....  0  1

et car  $\int f'^2$  cv,  $N_2(f) = \sqrt{\pi/2}$  .....  0  1



- 7)  $f(t) \sim_0 t$  .....  0  1  
 $f(t) \sim_\infty \ln t$  .....  0  1  2

- 8)  $f \in E_1$  car  $t \mapsto (\frac{f(t)}{t})^2 \sim_0 1$  intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1  
et  $\sim_\infty \frac{\ln^2 t}{t^2}$  intégrable sur  $[1, +\infty[$  .....  0  1

- 9)a)  $-\ln t/(1-t^2)$  intégrable sur  $]0, 1[$  car cpm .....  0  1  
et  $\sim_0 -\ln t = 0(1/\sqrt{t})$  intégrable sur  $]0, \frac{1}{2}]$  .....  0  1  
et  $\sim_1 -(t-1)/(1-t^2) = 1/(t+1) \sim_1 1/2$  intégrable sur  $[\frac{1}{2}, 1[$  .....  0  1

- 9)b)  $-t^{2k} \ln t$  intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1  
 $\int = \frac{1}{(2k+1)^2}$  .....  0  1  2

- 9)c)  $J = \sum_0^\infty \int$  car  $\sum \int |.|$  converge .....  0  1  
et  $\sum -t^{2k} \ln t = -\frac{\ln t}{1-t^2}$  .....  0  1  
rappel des autres hypothèses .....  0  1

- 9)d)  $J = \pi^2/8$  .....  0  1  
justification .....  0  1

- 10)a)  $I = 2 \int \frac{f(t)}{t\sqrt{t^2+1}}$  .....  0  1  2

- 10)b)  $f$  bijective de  $\mathbb{R}_+^*$  dans  $\mathbb{R}_+^*$  ;  $f^{-1} = \text{sh}$  .....  0  1  2  3

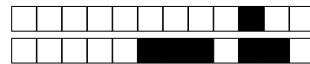
- 10)c) Justification cdv .....  0  1  
 $I = 2 \int \frac{u}{\text{sh} u}$  .....  0  1

- 10)d)  $I = 4J$  .....  0  1  
 $N_1(f) = \pi/\sqrt{2}$  .....  0  1  
 $\frac{N_1(f)}{N_2(f)} = \sqrt{\pi}$  .....  0  1
- 

- 11)a)  $h \rightarrow_0 \alpha$  .....  0  1  
 $g \rightarrow_0 0$  .....  0  1

- 11)b)  $f'(t) - \sqrt{t}g'(t) = h(t)/2$  .....  0  1  
11)c)  $\sqrt{t}g'(t) \rightarrow_0 \alpha/2$  .....  0  1

- $gg' \rightarrow_0 \alpha^2/2$  .....  0  1  
11)d)  $\int (f')^2 = g^2/2 + \int (\sqrt{t}g')^2 + \frac{1}{4} \int h^2$  .....  0  1  2  
justification des intégrabilités .....  0  1  
12)a)  $E_2 \subset E_1$  .....  0  1  2  
13)b)  $\sin \in E_1$  .....  0  1  2  
 $\sin \notin E_2$  .....  0  1  2  3  
..... .....  0  1  
..... .....  0  1  
..... .....  0  1



Nom : \_\_\_\_\_

## DS 2

Soin) .....  0  1  2  3

1)a) IPP :  $\int_2^x \frac{1}{\ln t} dt = \frac{x}{\ln x} + c_0 + \int_2^x g_0$  ;  $c_0 = -\frac{2}{\ln 2}$  ;  $g_0(t) = \frac{1}{(\ln t)^2}$   0  1  2

1)b)  $R_0 = o_\infty(\int_2^x \frac{1}{\ln t} dt)$  car  $\int_2^x \frac{1}{\ln t} dt$  diverge .....  0  1

et  $\frac{1}{(\ln t)^2} = o(\frac{1}{\ln t})$  .....  0  1

et  $1/\ln$  positive .....  0  1

1)c)  $R_0 \sim_\infty \frac{x}{\ln x}$  .....  0  1

car  $\int \frac{1}{\ln t} - R_0 \sim \int \frac{1}{\ln t}$  .....  0  1

et  $c_0 = o(\frac{x}{\ln x})$  .....  0  1

2)a)  $c_n = -2 \sum_{k=0}^n \frac{k!}{(\ln 2)^{k+1}}$  et  $g_n(t) = \frac{(n+1)!}{(\ln t)^{n+2}}$  .....  0  1  2  3

2)b))  $R_{n+1} = o(R_n)$  car  $1/\ln^{n+2} \geq 0$  et  $1/\ln^{n+3} = o_\infty(1/\ln^{n+2})$  .....  0  1

et car  $1/\ln^{n+2}$  non intégrable en  $\infty$  .....  0  1

2)c)  $R_n \sim (n+1)! \frac{x}{(\ln x)^{n+2}}$  .....  0  1  2

2)d)  $\int_2^x \frac{1}{\ln t} = \sum_{k=0}^n \frac{k!x}{(\ln x)^{k+1}} + o_{x \rightarrow +\infty}(\frac{x}{(\ln x)^{n+1}})$  .....  0  1

1)  $\arctan \in E_1$  car s'annule en 0 et  $C^1$  .....  0  1

et  $(\frac{\arctan t}{t})^2$  cpm .....  0  1

et  $(\frac{\arctan t}{t})^2$  intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1

et  $(\frac{\arctan t}{t})^2$  intégrable sur  $[1, +\infty[$  .....  0  1

2)  $H_u : t \mapsto \frac{1}{(t^2+1)(t^2+u)}$  intégrable sur  $[0, \infty[$  car continue sur  $[0, \infty[$  .....  0  1

et  $\sim_\infty 1/t^4$  donc intégrable sur  $[1, \infty[$  .....  0  1

$f' = \frac{1}{1+t^2}$  donc (avec  $u=1$ )  $f \in E_2$  .....  0  1

3)a)  $\varphi(u) \rightarrow \varphi(1)$  en  $1^+$  car  $t \mapsto H_u(t)$  cpm sur  $[0, \infty[$  .....  0  1

et  $H_u(t) \rightarrow H_1(t)$  .....  0  1

majoration indépendante de  $u$  par  $H_1(t)$  ou  $\frac{1}{1+t^2}$  .....  0  1

penser aux valeurs absolues (ou fonction positive) .....  0  1

intégrabilité du majorant .....  0  1

3)b)  $\frac{1}{(T+1)(T+u^2)} = \frac{1}{u^2-1} (\frac{1}{T+1} - \frac{1}{T+u^2})$  .....  0  1

3)c)  $\varphi(x) = \frac{\pi}{2x(x+1)}$  pour  $x \neq 1$  bien simplifiée .....  0  1

pas simplifiée .....  0  1

3)d)  $N_2(f)^2 = \lim_{1+} \varphi$ , citer 3.a .....  0  1

$N_2(f) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$  .....  0  1

4)  $G_x : t \mapsto \frac{\arctan(xt)}{t(t^2+1)}$  intégrable sur  $]0, \infty[$  car cpm .....  0  1

et  $\sim_0 x$  donc intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1

et  $O_\infty(1/t^3)$  sur  $[1, +\infty[$  .....  0  1

équivalent en  $\infty$  faux quand  $x=0$  .....  0  1

5)a)  $x \neq 0$  ;  $\theta'(x) = \frac{1}{x^2} \varphi(\frac{1}{x})$  ou  $x\varphi(x)$  .....  0  1

$\theta'(x) = \frac{\pi}{2(x+1)}$  .....  0  1

$\theta'(0) = \frac{\pi}{2}$  .....  0  1

5)b) TFA .....  0  1

$\theta(x) = \frac{\pi}{2} \ln(1+x) + C$  .....  0  1

$C = 0$  .....  0  1

5)c)  $N_1^2(f) = 2\theta(1)$  par IPP .....  0  1  2  3

5)d)  $N_1(f) = \sqrt{\pi \ln(2)}$  .....  0  1

$\frac{N_1(f)}{N_2(f)} = 2\sqrt{\ln(2)}$  .....  0  1

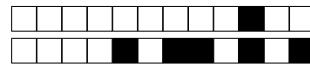
6)  $f'(t) = \frac{1+\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}}{t+\sqrt{t^2+1}}$  .....  0  1

$f'(t) = 1/(\sqrt{t^2+1})$  .....  0  1

$f \in E_1$  car  $f \in C^1([0, +\infty[)$  .....  0  1

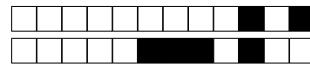
et car  $f(0)=0$  .....  0  1

et car  $\int f'^2$  cv,  $N_2(f) = \sqrt{\pi/2}$  .....  0  1



- 7)  $f(t) \sim_0 t$  .....  0  1  
 $f(t) \sim_\infty \ln t$  .....  0  1  2
- 8)  $f \in E_1$  car  $t \mapsto (\frac{f(t)}{t})^2 \sim_0 1$  intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1  
et  $\sim_\infty \frac{\ln^2 t}{t^2}$  intégrable sur  $[1, +\infty[$  .....  0  1
- 9)a)  $-\ln t/(1-t^2)$  intégrable sur  $]0, 1[$  car cpm .....  0  1  
et  $\sim_0 -\ln t = 0(1/\sqrt{t})$  intégrable sur  $]0, \frac{1}{2}]$  .....  0  1  
et  $\sim_1 -(t-1)/(1-t^2) = 1/(t+1) \sim_1 1/2$  intégrable sur  $[\frac{1}{2}, 1[$  .....  0  1
- 9)b)  $-t^{2k} \ln t$  intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1  
 $\int = \frac{1}{(2k+1)^2}$  .....  0  1  2
- 9)c)  $J = \sum_0^\infty \int$  car  $\sum \int |.|$  converge .....  0  1  
et  $\sum -t^{2k} \ln t = -\frac{\ln t}{1-t^2}$  .....  0  1  
rappel des autres hypothèses .....  0  1
- 9)d)  $J = \pi^2/8$  .....  0  1  
justification .....  0  1
- 10)a)  $I = 2 \int \frac{f(t)}{t\sqrt{t^2+1}}$  .....  0  1  2
- 10)b)  $f$  bijective de  $\mathbb{R}_+^*$  dans  $\mathbb{R}_+^*$  ;  $f^{-1} = \text{sh}$  .....  0  1  2  3
- 10)c) Justification cdv .....  0  1  
 $I = 2 \int \frac{u}{\text{sh} u}$  .....  0  1
- 10)d)  $I = 4J$  .....  0  1  
 $N_1(f) = \pi/\sqrt{2}$  .....  0  1  
 $\frac{N_1(f)}{N_2(f)} = \sqrt{\pi}$  .....  0  1
- 

- $gg' \rightarrow_0 \alpha^2/2$  .....  0  1
- 11)d)  $\int (f')^2 = g^2/2 + \int (\sqrt{t}g')^2 + \frac{1}{4} \int h^2$  .....  0  1  2  
justification des intégrabilités .....  0  1
- 12)a)  $E_2 \subset E_1$  .....  0  1  2
- 13)b)  $\sin \in E_1$  .....  0  1  2  
 $\sin \notin E_2$  .....  0  1  2  3  
..... .....  0  1  
..... .....  0  1  
..... .....  0  1



Nom : \_\_\_\_\_

## DS 2

Soin) .....  0  1  2  3

1)a) IPP :  $\int_2^x \frac{1}{\ln t} dt = \frac{x}{\ln x} + c_0 + \int_2^x g_0$  ;  $c_0 = -\frac{2}{\ln 2}$  ;  $g_0(t) = \frac{1}{(\ln t)^2}$   0  1  2

1)b)  $R_0 = o_\infty(\int_2^x \frac{1}{\ln t} dt)$  car  $\int_2^x \frac{1}{\ln t} dt$  diverge .....  0  1

et  $\frac{1}{(\ln t)^2} = o(\frac{1}{\ln t})$  .....  0  1

et  $1/\ln$  positive .....  0  1

1)c)  $R_0 \sim_\infty \frac{x}{\ln x}$  .....  0  1

car  $\int \frac{1}{\ln t} - R_0 \sim \int \frac{1}{\ln t}$  .....  0  1

et  $c_0 = o(\frac{x}{\ln x})$  .....  0  1

2)a)  $c_n = -2 \sum_0^n \frac{k!}{(\ln 2)^{k+1}}$  et  $g_n(t) = \frac{(n+1)!}{(\ln t)^{n+2}}$  .....  0  1  2  3

2)b))  $R_{n+1} = o(R_n)$  car  $1/\ln^{n+2} \geq 0$  et  $1/\ln^{n+3} = o_\infty(1/\ln^{n+2})$  .....  0  1

et car  $1/\ln^{n+2}$  non intégrable en  $\infty$  .....  0  1

2)c)  $R_n \sim (n+1)! \frac{x}{(\ln x)^{n+2}}$  .....  0  1  2

2)d)  $\int_2^x \frac{1}{\ln t} = \sum_{k=0}^n \frac{k!x}{(\ln x)^{k+1}} + o_{x \rightarrow +\infty}(\frac{x}{(\ln x)^{n+1}})$  .....  0  1

1)  $\arctan \in E_1$  car s'annule en 0 et  $C^1$  .....  0  1

et  $(\frac{\arctan t}{t})^2$  cpm .....  0  1

et  $(\frac{\arctan t}{t})^2$  intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1

et  $(\frac{\arctan t}{t})^2$  intégrable sur  $[1, +\infty[$  .....  0  1

2)  $H_u : t \mapsto \frac{1}{(t^2+1)(t^2+u)}$  intégrable sur  $[0, \infty[$  car continue sur  $[0, \infty[$  .....  0  1

et  $\sim_\infty 1/t^4$  donc intégrable sur  $[1, \infty[$  .....  0  1

$f' = \frac{1}{1+t^2}$  donc (avec  $u=1$ )  $f \in E_2$  .....  0  1

3)a)  $\varphi(u) \rightarrow \varphi(1)$  en  $1^+$  car  $t \mapsto H_u(t)$  cpm sur  $[0, \infty[$  .....  0  1

et  $H_u(t) \rightarrow H_1(t)$  .....  0  1

majoration indépendante de  $u$  par  $H_1(t)$  ou  $\frac{1}{1+t^2}$  .....  0  1

penser aux valeurs absolues (ou fonction positive) .....  0  1

intégrabilité du majorant .....  0  1

3)b)  $\frac{1}{(T+1)(T+u^2)} = \frac{1}{u^2-1} (\frac{1}{T+1} - \frac{1}{T+u^2})$  .....  0  1

3)c)  $\varphi(x) = \frac{\pi}{2x(x+1)}$  pour  $x \neq 1$  bien simplifiée .....  0  1

pas simplifiée .....  0  1

3)d)  $N_2(f)^2 = \lim_{1+} \varphi$ , citer 3.a .....  0  1

$N_2(f) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$  .....  0  1

4)  $G_x : t \mapsto \frac{\arctan(xt)}{t(t^2+1)}$  intégrable sur  $]0, \infty[$  car cpm .....  0  1

et  $\sim_0 x$  donc intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1

et  $O_\infty(1/t^3)$  sur  $[1, +\infty[$  .....  0  1

équivalent en  $\infty$  faux quand  $x=0$  .....  0  1

5)a)  $x \neq 0$  ;  $\theta'(x) = \frac{1}{x^2} \varphi(\frac{1}{x})$  ou  $x\varphi(x)$  .....  0  1

$\theta'(x) = \frac{\pi}{2(x+1)}$  .....  0  1

$\theta'(0) = \frac{\pi}{2}$  .....  0  1

5)b) TFA .....  0  1

$\theta(x) = \frac{\pi}{2} \ln(1+x) + C$  .....  0  1

$C = 0$  .....  0  1

5)c)  $N_1^2(f) = 2\theta(1)$  par IPP .....  0  1  2  3

5)d)  $N_1(f) = \sqrt{\pi \ln(2)}$  .....  0  1

$\frac{N_1(f)}{N_2(f)} = 2\sqrt{\ln(2)}$  .....  0  1

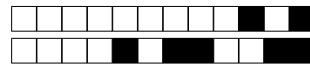
6)  $f'(t) = \frac{1+\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}}{t+\sqrt{t^2+1}}$  .....  0  1

$f'(t) = 1/(\sqrt{t^2+1})$  .....  0  1

$f \in E_1$  car  $f \in C^1([0, +\infty[)$  .....  0  1

et car  $f(0)=0$  .....  0  1

et car  $\int f'^2$  cv,  $N_2(f) = \sqrt{\pi/2}$  .....  0  1



- 7)  $f(t) \sim_0 t$  .....  0  1  
 $f(t) \sim_\infty \ln t$  .....  0  1  2

- 8)  $f \in E_1$  car  $t \mapsto (\frac{f(t)}{t})^2 \sim_0 1$  intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1  
et  $\sim_\infty \frac{\ln^2 t}{t^2}$  intégrable sur  $[1, +\infty[$  .....  0  1

- 9)a)  $-\ln t/(1-t^2)$  intégrable sur  $]0, 1[$  car cpm .....  0  1  
et  $\sim_0 -\ln t = 0(1/\sqrt{t})$  intégrable sur  $]0, \frac{1}{2}]$  .....  0  1  
et  $\sim_1 -(t-1)/(1-t^2) = 1/(t+1) \sim_1 1/2$  intégrable sur  $[\frac{1}{2}, 1[$  .....  0  1

- 9)b)  $-t^{2k} \ln t$  intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1  
 $\int = \frac{1}{(2k+1)^2}$  .....  0  1  2

- 9)c)  $J = \sum_0^\infty \int$  car  $\sum \int |.|$  converge .....  0  1  
et  $\sum -t^{2k} \ln t = -\frac{\ln t}{1-t^2}$  .....  0  1  
rappel des autres hypothèses .....  0  1

- 9)d)  $J = \pi^2/8$  .....  0  1  
justification .....  0  1

- 10)a)  $I = 2 \int \frac{f(t)}{t\sqrt{t^2+1}}$  .....  0  1  2

- 10)b)  $f$  bijective de  $\mathbb{R}_+^*$  dans  $\mathbb{R}_+^*$  ;  $f^{-1} = \text{sh}$  .....  0  1  2  3

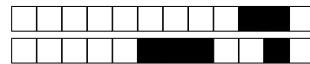
- 10)c) Justification cdv .....  0  1  
 $I = 2 \int \frac{u}{\text{sh} u}$  .....  0  1

- 10)d)  $I = 4J$  .....  0  1  
 $N_1(f) = \pi/\sqrt{2}$  .....  0  1  
 $\frac{N_1(f)}{N_2(f)} = \sqrt{\pi}$  .....  0  1
- 

- 11)a)  $h \rightarrow_0 \alpha$  .....  0  1  
 $g \rightarrow_0 0$  .....  0  1

- 11)b)  $f'(t) - \sqrt{t}g'(t) = h(t)/2$  .....  0  1  
11)c)  $\sqrt{t}g'(t) \rightarrow_0 \alpha/2$  .....  0  1

- $gg' \rightarrow_0 \alpha^2/2$  .....  0  1  
11)d)  $\int (f')^2 = g^2/2 + \int (\sqrt{t}g')^2 + \frac{1}{4} \int h^2$  .....  0  1  2  
justification des intégrabilités .....  0  1  
12)a)  $E_2 \subset E_1$  .....  0  1  2  
13)b)  $\sin \in E_1$  .....  0  1  2  
 $\sin \notin E_2$  .....  0  1  2  3  
..... .....  0  1  
..... .....  0  1  
..... .....  0  1



Nom : \_\_\_\_\_

## DS 2

Soin) .....  0  1  2  3

1)a) IPP :  $\int_2^x \frac{1}{\ln t} dt = \frac{x}{\ln x} + c_0 + \int_2^x g_0$  ;  $c_0 = -\frac{2}{\ln 2}$  ;  $g_0(t) = \frac{1}{(\ln t)^2}$   0  1  2

1)b)  $R_0 = o_\infty(\int_2^x \frac{1}{\ln t} dt)$  car  $\int_2^x \frac{1}{\ln t} dt$  diverge .....  0  1

et  $\frac{1}{(\ln t)^2} = o(\frac{1}{\ln t})$  .....  0  1

et  $1/\ln$  positive .....  0  1

1)c)  $R_0 \sim_\infty \frac{x}{\ln x}$  .....  0  1

car  $\int \frac{1}{\ln t} - R_0 \sim \int \frac{1}{\ln t}$  .....  0  1

et  $c_0 = o(\frac{x}{\ln x})$  .....  0  1

2)a)  $c_n = -2 \sum_{k=0}^n \frac{k!}{(\ln 2)^{k+1}}$  et  $g_n(t) = \frac{(n+1)!}{(\ln t)^{n+2}}$  .....  0  1  2  3

2)b))  $R_{n+1} = o(R_n)$  car  $1/\ln^{n+2} \geq 0$  et  $1/\ln^{n+3} = o_\infty(1/\ln^{n+2})$  .....  0  1

et car  $1/\ln^{n+2}$  non intégrable en  $\infty$  .....  0  1

2)c)  $R_n \sim (n+1)! \frac{x}{(\ln x)^{n+2}}$  .....  0  1  2

2)d)  $\int_2^x \frac{1}{\ln t} = \sum_{k=0}^n \frac{k!x}{(\ln x)^{k+1}} + o_{x \rightarrow +\infty}(\frac{x}{(\ln x)^{n+1}})$  .....  0  1

1)  $\arctan \in E_1$  car s'annule en 0 et  $C^1$  .....  0  1

et  $(\frac{\arctan t}{t})^2$  cpm .....  0  1

et  $(\frac{\arctan t}{t})^2$  intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1

et  $(\frac{\arctan t}{t})^2$  intégrable sur  $[1, +\infty[$  .....  0  1

2)  $H_u : t \mapsto \frac{1}{(t^2+1)(t^2+u)}$  intégrable sur  $[0, \infty[$  car continue sur  $[0, \infty[$  .....  0  1

et  $\sim_\infty 1/t^4$  donc intégrable sur  $[1, \infty[$  .....  0  1

$f' = \frac{1}{1+t^2}$  donc (avec  $u=1$ )  $f \in E_2$  .....  0  1

3)a)  $\varphi(u) \rightarrow \varphi(1)$  en  $1^+$  car  $t \mapsto H_u(t)$  cpm sur  $[0, \infty[$  .....  0  1

et  $H_u(t) \rightarrow H_1(t)$  .....  0  1

majoration indépendante de  $u$  par  $H_1(t)$  ou  $\frac{1}{1+t^2}$  .....  0  1

penser aux valeurs absolues (ou fonction positive) .....  0  1

intégrabilité du majorant .....  0  1

3)b)  $\frac{1}{(T+1)(T+u^2)} = \frac{1}{u^2-1} (\frac{1}{T+1} - \frac{1}{T+u^2})$  .....  0  1

3)c)  $\varphi(x) = \frac{\pi}{2x(x+1)}$  pour  $x \neq 1$  bien simplifiée .....  0  1

pas simplifiée .....  0  1

3)d)  $N_2(f)^2 = \lim_{1+} \varphi$ , citer 3.a .....  0  1

$N_2(f) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$  .....  0  1

4)  $G_x : t \mapsto \frac{\arctan(xt)}{t(t^2+1)}$  intégrable sur  $]0, \infty[$  car cpm .....  0  1

et  $\sim_0 x$  donc intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1

et  $O_\infty(1/t^3)$  sur  $[1, +\infty[$  .....  0  1

équivalent en  $\infty$  faux quand  $x=0$  .....  0  1

5)a)  $x \neq 0$  ;  $\theta'(x) = \frac{1}{x^2} \varphi(\frac{1}{x})$  ou  $x\varphi(x)$  .....  0  1

$\theta'(x) = \frac{\pi}{2(x+1)}$  .....  0  1

$\theta'(0) = \frac{\pi}{2}$  .....  0  1

5)b) TFA .....  0  1

$\theta(x) = \frac{\pi}{2} \ln(1+x) + C$  .....  0  1

$C = 0$  .....  0  1

5)c)  $N_1^2(f) = 2\theta(1)$  par IPP .....  0  1  2  3

5)d)  $N_1(f) = \sqrt{\pi \ln(2)}$  .....  0  1

$\frac{N_1(f)}{N_2(f)} = 2\sqrt{\ln(2)}$  .....  0  1

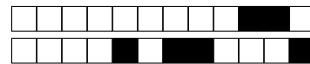
6)  $f'(t) = \frac{1+\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}}{t+\sqrt{t^2+1}}$  .....  0  1

$f'(t) = 1/(\sqrt{t^2+1})$  .....  0  1

$f \in E_1$  car  $f \in C^1([0, +\infty[)$  .....  0  1

et car  $f(0)=0$  .....  0  1

et car  $\int f'^2$  cv,  $N_2(f) = \sqrt{\pi/2}$  .....  0  1



- 7)  $f(t) \sim_0 t$  .....  0  1  
 $f(t) \sim_\infty \ln t$  .....  0  1  2

- 8)  $f \in E_1$  car  $t \mapsto (\frac{f(t)}{t})^2 \sim_0 1$  intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1  
et  $\sim_\infty \frac{\ln^2 t}{t^2}$  intégrable sur  $[1, +\infty[$  .....  0  1

- 9)a)  $-\ln t/(1-t^2)$  intégrable sur  $]0, 1[$  car cpm .....  0  1  
et  $\sim_0 -\ln t = 0(1/\sqrt{t})$  intégrable sur  $]0, \frac{1}{2}]$  .....  0  1  
et  $\sim_1 -(t-1)/(1-t^2) = 1/(t+1) \sim_1 1/2$  intégrable sur  $[\frac{1}{2}, 1[$  .....  0  1

- 9)b)  $-t^{2k} \ln t$  intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1  
 $\int = \frac{1}{(2k+1)^2}$  .....  0  1  2

- 9)c)  $J = \sum_0^\infty \int$  car  $\sum \int |.|$  converge .....  0  1  
et  $\sum -t^{2k} \ln t = -\frac{\ln t}{1-t^2}$  .....  0  1  
rappel des autres hypothèses .....  0  1

- 9)d)  $J = \pi^2/8$  .....  0  1  
justification .....  0  1

- 10)a)  $I = 2 \int \frac{f(t)}{t\sqrt{t^2+1}}$  .....  0  1  2

- 10)b)  $f$  bijective de  $\mathbb{R}_+^*$  dans  $\mathbb{R}_+^*$  ;  $f^{-1} = \text{sh}$  .....  0  1  2  3

- 10)c) Justification cdv .....  0  1  
 $I = 2 \int \frac{u}{\text{sh} u}$  .....  0  1

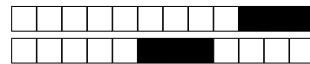
- 10)d)  $I = 4J$  .....  0  1  
 $N_1(f) = \pi/\sqrt{2}$  .....  0  1  
 $\frac{N_1(f)}{N_2(f)} = \sqrt{\pi}$  .....  0  1
- 

- 11)a)  $h \rightarrow_0 \alpha$  .....  0  1  
 $g \rightarrow_0 0$  .....  0  1

- 11)b)  $f'(t) - \sqrt{t}g'(t) = h(t)/2$  .....  0  1

- 11)c)  $\sqrt{t}g'(t) \rightarrow_0 \alpha/2$  .....  0  1

- $gg' \rightarrow_0 \alpha^2/2$  .....  0  1  
11)d)  $\int (f')^2 = g^2/2 + \int (\sqrt{t}g')^2 + \frac{1}{4} \int h^2$  .....  0  1  2  
justification des intégrabilités .....  0  1  
12)a)  $E_2 \subset E_1$  .....  0  1  2  
13)b)  $\sin \in E_1$  .....  0  1  2  
 $\sin \notin E_2$  .....  0  1  2  3  
..... .....  0  1  
..... .....  0  1  
..... .....  0  1



Nom : \_\_\_\_\_

## DS 2

Soin) .....  0  1  2  3

1)a) IPP :  $\int_2^x \frac{1}{\ln t} dt = \frac{x}{\ln x} + c_0 + \int_2^x g_0 ; c_0 = -\frac{2}{\ln 2} ; g_0(t) = \frac{1}{(\ln t)^2}$   0  1  2

1)b)  $R_0 = o_\infty(\int_2^x \frac{1}{\ln t} dt)$  car  $\int_2^x \frac{1}{\ln t} dt$  diverge .....  0  1

et  $\frac{1}{(\ln t)^2} = o(\frac{1}{\ln t})$  .....  0  1

et  $1/\ln$  positive .....  0  1

1)c)  $R_0 \sim_\infty \frac{x}{\ln x}$  .....  0  1

car  $\int \frac{1}{\ln t} - R_0 \sim \int \frac{1}{\ln t}$  .....  0  1

et  $c_0 = o(\frac{x}{\ln x})$  .....  0  1

2)a)  $c_n = -2 \sum_{k=0}^n \frac{k!}{(\ln 2)^{k+1}}$  et  $g_n(t) = \frac{(n+1)!}{(\ln t)^{n+2}}$  .....  0  1  2  3

2)b))  $R_{n+1} = o(R_n)$  car  $1/\ln^{n+2} \geq 0$  et  $1/\ln^{n+3} = o_\infty(1/\ln^{n+2})$  .....  0  1

et car  $1/\ln^{n+2}$  non intégrable en  $\infty$  .....  0  1

2)c)  $R_n \sim (n+1)! \frac{x}{(\ln x)^{n+2}}$  .....  0  1  2

2)d)  $\int_2^x \frac{1}{\ln t} = \sum_{k=0}^n \frac{k!x}{(\ln x)^{k+1}} + o_{x \rightarrow +\infty}(\frac{x}{(\ln x)^{n+1}})$  .....  0  1

1)  $\arctan \in E_1$  car s'annule en 0 et  $C^1$  .....  0  1

et  $(\frac{\arctan t}{t})^2$  cpm .....  0  1

et  $(\frac{\arctan t}{t})^2$  intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1

et  $(\frac{\arctan t}{t})^2$  intégrable sur  $[1, +\infty[$  .....  0  1

2)  $H_u : t \mapsto \frac{1}{(t^2+1)(t^2+u)}$  intégrable sur  $[0, \infty[$  car continue sur  $[0, \infty[$  .....  0  1

et  $\sim_\infty 1/t^4$  donc intégrable sur  $[1, \infty[$  .....  0  1

$f' = \frac{1}{1+t^2}$  donc (avec  $u=1$ )  $f \in E_2$  .....  0  1

3)a)  $\varphi(u) \rightarrow \varphi(1)$  en  $1^+$  car  $t \mapsto H_u(t)$  cpm sur  $[0, \infty[$  .....  0  1

et  $H_u(t) \rightarrow H_1(t)$  .....  0  1

majoration indépendante de  $u$  par  $H_1(t)$  ou  $\frac{1}{1+t^2}$  .....  0  1

penser aux valeurs absolues (ou fonction positive) .....  0  1

intégrabilité du majorant .....  0  1

3)b)  $\frac{1}{(T+1)(T+u^2)} = \frac{1}{u^2-1} (\frac{1}{T+1} - \frac{1}{T+u^2})$  .....  0  1

3)c)  $\varphi(x) = \frac{\pi}{2x(x+1)}$  pour  $x \neq 1$  bien simplifiée .....  0  1

pas simplifiée .....  0  1

3)d)  $N_2(f)^2 = \lim_{1+} \varphi$ , citer 3.a .....  0  1

$N_2(f) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$  .....  0  1

4)  $G_x : t \mapsto \frac{\arctan(xt)}{t(t^2+1)}$  intégrable sur  $]0, \infty[$  car cpm .....  0  1

et  $\sim_0 x$  donc intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1

et  $O_\infty(1/t^3)$  sur  $[1, +\infty[$  .....  0  1

équivalent en  $\infty$  faux quand  $x=0$  .....  0  1

5)a)  $x \neq 0 ; \theta'(x) = \frac{1}{x^2} \varphi(\frac{1}{x})$  ou  $x\varphi(x)$  .....  0  1

$\theta'(x) = \frac{\pi}{2(x+1)}$  .....  0  1

$\theta'(0) = \frac{\pi}{2}$  .....  0  1

5)b) TFA .....  0  1

$\theta(x) = \frac{\pi}{2} \ln(1+x) + C$  .....  0  1

$C = 0$  .....  0  1

5)c)  $N_1^2(f) = 2\theta(1)$  par IPP .....  0  1  2  3

5)d)  $N_1(f) = \sqrt{\pi \ln(2)}$  .....  0  1

$\frac{N_1(f)}{N_2(f)} = 2\sqrt{\ln(2)}$  .....  0  1

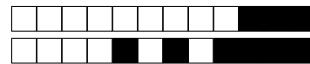
6)  $f'(t) = \frac{1+\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}}{t+\sqrt{t^2+1}}$  .....  0  1

$f'(t) = 1/(\sqrt{t^2+1})$  .....  0  1

$f \in E_1$  car  $f \in C^1([0, +\infty[)$  .....  0  1

et car  $f(0)=0$  .....  0  1

et car  $\int f'^2$  cv,  $N_2(f) = \sqrt{\pi/2}$  .....  0  1



- 7)  $f(t) \sim_0 t$  .....  0  1  
 $f(t) \sim_\infty \ln t$  .....  0  1  2

- 8)  $f \in E_1$  car  $t \mapsto (\frac{f(t)}{t})^2 \sim_0 1$  intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1  
et  $\sim_\infty \frac{\ln^2 t}{t^2}$  intégrable sur  $[1, +\infty[$  .....  0  1

- 9)a)  $-\ln t/(1-t^2)$  intégrable sur  $]0, 1[$  car cpm .....  0  1  
et  $\sim_0 -\ln t = 0(1/\sqrt{t})$  intégrable sur  $]0, \frac{1}{2}]$  .....  0  1  
et  $\sim_1 -(t-1)/(1-t^2) = 1/(t+1) \sim_1 1/2$  intégrable sur  $[\frac{1}{2}, 1[$  .....  0  1

- 9)b)  $-t^{2k} \ln t$  intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1  
 $\int = \frac{1}{(2k+1)^2}$  .....  0  1  2

- 9)c)  $J = \sum_0^\infty \int$  car  $\sum \int |.|$  converge .....  0  1  
et  $\sum -t^{2k} \ln t = -\frac{\ln t}{1-t^2}$  .....  0  1  
rappel des autres hypothèses .....  0  1

- 9)d)  $J = \pi^2/8$  .....  0  1  
justification .....  0  1

- 10)a)  $I = 2 \int \frac{f(t)}{t\sqrt{t^2+1}}$  .....  0  1  2

- 10)b)  $f$  bijective de  $\mathbb{R}_+^*$  dans  $\mathbb{R}_+^*$  ;  $f^{-1} = \text{sh}$  .....  0  1  2  3

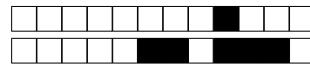
- 10)c) Justification cdv .....  0  1  
 $I = 2 \int \frac{u}{\text{sh} u}$  .....  0  1

- 10)d)  $I = 4J$  .....  0  1  
 $N_1(f) = \pi/\sqrt{2}$  .....  0  1  
 $\frac{N_1(f)}{N_2(f)} = \sqrt{\pi}$  .....  0  1
- 

- 11)a)  $h \rightarrow_0 \alpha$  .....  0  1  
 $g \rightarrow_0 0$  .....  0  1

- 11)b)  $f'(t) - \sqrt{t}g'(t) = h(t)/2$  .....  0  1  
11)c)  $\sqrt{t}g'(t) \rightarrow_0 \alpha/2$  .....  0  1

- $gg' \rightarrow_0 \alpha^2/2$  .....  0  1  
11)d)  $\int (f')^2 = g^2/2 + \int (\sqrt{t}g')^2 + \frac{1}{4} \int h^2$  .....  0  1  2  
justification des intégrabilités .....  0  1  
12)a)  $E_2 \subset E_1$  .....  0  1  2  
13)b)  $\sin \in E_1$  .....  0  1  2  
 $\sin \notin E_2$  .....  0  1  2  3  
..... .....  0  1  
..... .....  0  1  
..... .....  0  1



Nom : \_\_\_\_\_

## DS 2

Soin) .....  0  1  2  3

1)a) IPP :  $\int_2^x \frac{1}{\ln t} dt = \frac{x}{\ln x} + c_0 + \int_2^x g_0$  ;  $c_0 = -\frac{2}{\ln 2}$  ;  $g_0(t) = \frac{1}{(\ln t)^2}$   0  1  2

1)b)  $R_0 = o_\infty(\int_2^x \frac{1}{\ln t} dt)$  car  $\int_2^x \frac{1}{\ln t} dt$  diverge .....  0  1

et  $\frac{1}{(\ln t)^2} = o(\frac{1}{\ln t})$  .....  0  1

et  $1/\ln$  positive .....  0  1

1)c)  $R_0 \sim_\infty \frac{x}{\ln x}$  .....  0  1

car  $\int \frac{1}{\ln t} - R_0 \sim \int \frac{1}{\ln t}$  .....  0  1

et  $c_0 = o(\frac{x}{\ln x})$  .....  0  1

2)a)  $c_n = -2 \sum_{k=0}^n \frac{k!}{(\ln 2)^{k+1}}$  et  $g_n(t) = \frac{(n+1)!}{(\ln t)^{n+2}}$  .....  0  1  2  3

2)b))  $R_{n+1} = o(R_n)$  car  $1/\ln^{n+2} \geq 0$  et  $1/\ln^{n+3} = o_\infty(1/\ln^{n+2})$  .....  0  1

et car  $1/\ln^{n+2}$  non intégrable en  $\infty$  .....  0  1

2)c)  $R_n \sim (n+1)! \frac{x}{(\ln x)^{n+2}}$  .....  0  1  2

2)d)  $\int_2^x \frac{1}{\ln t} = \sum_{k=0}^n \frac{k!x}{(\ln x)^{k+1}} + o_{x \rightarrow +\infty}(\frac{x}{(\ln x)^{n+1}})$  .....  0  1

1)  $\arctan \in E_1$  car s'annule en 0 et  $C^1$  .....  0  1

et  $(\frac{\arctan t}{t})^2$  cpm .....  0  1

et  $(\frac{\arctan t}{t})^2$  intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1

et  $(\frac{\arctan t}{t})^2$  intégrable sur  $[1, +\infty[$  .....  0  1

2)  $H_u : t \mapsto \frac{1}{(t^2+1)(t^2+u)}$  intégrable sur  $[0, \infty[$  car continue sur  $[0, \infty[$  .....  0  1

et  $\sim_\infty 1/t^4$  donc intégrable sur  $[1, \infty[$  .....  0  1

$f' = \frac{1}{1+t^2}$  donc (avec  $u=1$ )  $f \in E_2$  .....  0  1

3)a)  $\varphi(u) \rightarrow \varphi(1)$  en  $1^+$  car  $t \mapsto H_u(t)$  cpm sur  $[0, \infty[$  .....  0  1

et  $H_u(t) \rightarrow H_1(t)$  .....  0  1

majoration indépendante de  $u$  par  $H_1(t)$  ou  $\frac{1}{1+t^2}$  .....  0  1

penser aux valeurs absolues (ou fonction positive) .....  0  1

intégrabilité du majorant .....  0  1

3)b)  $\frac{1}{(T+1)(T+u^2)} = \frac{1}{u^2-1} (\frac{1}{T+1} - \frac{1}{T+u^2})$  .....  0  1

3)c)  $\varphi(x) = \frac{\pi}{2x(x+1)}$  pour  $x \neq 1$  bien simplifiée .....  0  1

pas simplifiée .....  0  1

3)d)  $N_2(f)^2 = \lim_{1+} \varphi$ , citer 3.a .....  0  1

$N_2(f) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$  .....  0  1

4)  $G_x : t \mapsto \frac{\arctan(xt)}{t(t^2+1)}$  intégrable sur  $]0, \infty[$  car cpm .....  0  1

et  $\sim_0 x$  donc intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1

et  $O_\infty(1/t^3)$  sur  $[1, +\infty[$  .....  0  1

équivalent en  $\infty$  faux quand  $x=0$  .....  0  1

5)a)  $x \neq 0$  ;  $\theta'(x) = \frac{1}{x^2} \varphi(\frac{1}{x})$  ou  $x\varphi(x)$  .....  0  1

$\theta'(x) = \frac{\pi}{2(x+1)}$  .....  0  1

$\theta'(0) = \frac{\pi}{2}$  .....  0  1

5)b) TFA .....  0  1

$\theta(x) = \frac{\pi}{2} \ln(1+x) + C$  .....  0  1

$C = 0$  .....  0  1

5)c)  $N_1^2(f) = 2\theta(1)$  par IPP .....  0  1  2  3

5)d)  $N_1(f) = \sqrt{\pi \ln(2)}$  .....  0  1

$\frac{N_1(f)}{N_2(f)} = 2\sqrt{\ln(2)}$  .....  0  1

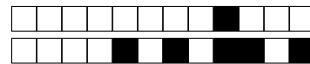
6)  $f'(t) = \frac{1+\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}}{t+\sqrt{t^2+1}}$  .....  0  1

$f'(t) = 1/(\sqrt{t^2+1})$  .....  0  1

$f \in E_1$  car  $f \in C^1([0, +\infty[)$  .....  0  1

et car  $f(0)=0$  .....  0  1

et car  $\int f'^2$  cv,  $N_2(f) = \sqrt{\pi/2}$  .....  0  1



- 7)  $f(t) \sim_0 t$  .....  0  1  
 $f(t) \sim_\infty \ln t$  .....  0  1  2

- 8)  $f \in E_1$  car  $t \mapsto (\frac{f(t)}{t})^2 \sim_0 1$  intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1  
et  $\sim_\infty \frac{\ln^2 t}{t^2}$  intégrable sur  $[1, +\infty[$  .....  0  1

- 9)a)  $-\ln t/(1-t^2)$  intégrable sur  $]0, 1[$  car cpm .....  0  1  
et  $\sim_0 -\ln t = 0(1/\sqrt{t})$  intégrable sur  $]0, \frac{1}{2}]$  .....  0  1  
et  $\sim_1 -(t-1)/(1-t^2) = 1/(t+1) \sim_1 1/2$  intégrable sur  $[\frac{1}{2}, 1[$  .....  0  1

- 9)b)  $-t^{2k} \ln t$  intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1  
 $\int = \frac{1}{(2k+1)^2}$  .....  0  1  2

- 9)c)  $J = \sum_0^\infty \int$  car  $\sum \int |.|$  converge .....  0  1  
et  $\sum -t^{2k} \ln t = -\frac{\ln t}{1-t^2}$  .....  0  1  
rappel des autres hypothèses .....  0  1

- 9)d)  $J = \pi^2/8$  .....  0  1  
justification .....  0  1

- 10)a)  $I = 2 \int \frac{f(t)}{t\sqrt{t^2+1}}$  .....  0  1  2

- 10)b)  $f$  bijective de  $\mathbb{R}_+^*$  dans  $\mathbb{R}_+^*$  ;  $f^{-1} = \text{sh}$  .....  0  1  2  3

- 10)c) Justification cdv .....  0  1  
 $I = 2 \int \frac{u}{\text{sh} u}$  .....  0  1

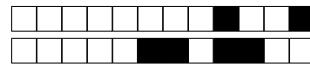
- 10)d)  $I = 4J$  .....  0  1  
 $N_1(f) = \pi/\sqrt{2}$  .....  0  1  
 $\frac{N_1(f)}{N_2(f)} = \sqrt{\pi}$  .....  0  1
- 

- 11)a)  $h \rightarrow_0 \alpha$  .....  0  1  
 $g \rightarrow_0 0$  .....  0  1

- 11)b)  $f'(t) - \sqrt{t}g'(t) = h(t)/2$  .....  0  1

- 11)c)  $\sqrt{t}g'(t) \rightarrow_0 \alpha/2$  .....  0  1

- $gg' \rightarrow_0 \alpha^2/2$  .....  0  1  
11)d)  $\int (f')^2 = g^2/2 + \int (\sqrt{t}g')^2 + \frac{1}{4} \int h^2$  .....  0  1  2  
justification des intégrabilités .....  0  1  
12)a)  $E_2 \subset E_1$  .....  0  1  2  
13)b)  $\sin \in E_1$  .....  0  1  2  
 $\sin \notin E_2$  .....  0  1  2  3  
..... .....  0  1  
..... .....  0  1  
..... .....  0  1



Nom : \_\_\_\_\_

## DS 2

Soin) .....  0  1  2  3

1)a) IPP :  $\int_2^x \frac{1}{\ln t} dt = \frac{x}{\ln x} + c_0 + \int_2^x g_0$  ;  $c_0 = -\frac{2}{\ln 2}$  ;  $g_0(t) = \frac{1}{(\ln t)^2}$   0  1  2

1)b)  $R_0 = o_\infty(\int_2^x \frac{1}{\ln t} dt)$  car  $\int_2^x \frac{1}{\ln t} dt$  diverge .....  0  1

et  $\frac{1}{(\ln t)^2} = o(\frac{1}{\ln t})$  .....  0  1

et  $1/\ln$  positive .....  0  1

1)c)  $R_0 \sim_\infty \frac{x}{\ln x}$  .....  0  1

car  $\int \frac{1}{\ln t} - R_0 \sim \int \frac{1}{\ln t}$  .....  0  1

et  $c_0 = o(\frac{x}{\ln x})$  .....  0  1

2)a)  $c_n = -2 \sum_{k=0}^n \frac{k!}{(\ln 2)^{k+1}}$  et  $g_n(t) = \frac{(n+1)!}{(\ln t)^{n+2}}$  .....  0  1  2  3

2)b))  $R_{n+1} = o(R_n)$  car  $1/\ln^{n+2} \geq 0$  et  $1/\ln^{n+3} = o_\infty(1/\ln^{n+2})$  .....  0  1

et car  $1/\ln^{n+2}$  non intégrable en  $\infty$  .....  0  1

2)c)  $R_n \sim (n+1)! \frac{x}{(\ln x)^{n+2}}$  .....  0  1  2

2)d)  $\int_2^x \frac{1}{\ln t} = \sum_{k=0}^n \frac{k!x}{(\ln x)^{k+1}} + o_{x \rightarrow +\infty}(\frac{x}{(\ln x)^{n+1}})$  .....  0  1

1)  $\arctan \in E_1$  car s'annule en 0 et  $C^1$  .....  0  1

et  $(\frac{\arctan t}{t})^2$  cpm .....  0  1

et  $(\frac{\arctan t}{t})^2$  intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1

et  $(\frac{\arctan t}{t})^2$  intégrable sur  $[1, +\infty[$  .....  0  1

2)  $H_u : t \mapsto \frac{1}{(t^2+1)(t^2+u)}$  intégrable sur  $[0, \infty[$  car continue sur  $[0, \infty[$  .....  0  1

et  $\sim_\infty 1/t^4$  donc intégrable sur  $[1, \infty[$  .....  0  1

$f' = \frac{1}{1+t^2}$  donc (avec  $u=1$ )  $f \in E_2$  .....  0  1

3)a)  $\varphi(u) \rightarrow \varphi(1)$  en  $1^+$  car  $t \mapsto H_u(t)$  cpm sur  $[0, \infty[$  .....  0  1

et  $H_u(t) \rightarrow H_1(t)$  .....  0  1

majoration indépendante de  $u$  par  $H_1(t)$  ou  $\frac{1}{1+t^2}$  .....  0  1

penser aux valeurs absolues (ou fonction positive) .....  0  1

intégrabilité du majorant .....  0  1

3)b)  $\frac{1}{(T+1)(T+u^2)} = \frac{1}{u^2-1} (\frac{1}{T+1} - \frac{1}{T+u^2})$  .....  0  1

3)c)  $\varphi(x) = \frac{\pi}{2x(x+1)}$  pour  $x \neq 1$  bien simplifiée .....  0  1

pas simplifiée .....  0  1

3)d)  $N_2(f)^2 = \lim_{1+} \varphi$ , citer 3.a .....  0  1

$N_2(f) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$  .....  0  1

4)  $G_x : t \mapsto \frac{\arctan(xt)}{t(t^2+1)}$  intégrable sur  $]0, \infty[$  car cpm .....  0  1

et  $\sim_0 x$  donc intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1

et  $O_\infty(1/t^3)$  sur  $[1, +\infty[$  .....  0  1

équivalent en  $\infty$  faux quand  $x=0$  .....  0  1

5)a)  $x \neq 0$  ;  $\theta'(x) = \frac{1}{x^2} \varphi(\frac{1}{x})$  ou  $x\varphi(x)$  .....  0  1

$\theta'(x) = \frac{\pi}{2(x+1)}$  .....  0  1

$\theta'(0) = \frac{\pi}{2}$  .....  0  1

5)b) TFA .....  0  1

$\theta(x) = \frac{\pi}{2} \ln(1+x) + C$  .....  0  1

$C = 0$  .....  0  1

5)c)  $N_1^2(f) = 2\theta(1)$  par IPP .....  0  1  2  3

5)d)  $N_1(f) = \sqrt{\pi \ln(2)}$  .....  0  1

$\frac{N_1(f)}{N_2(f)} = 2\sqrt{\ln(2)}$  .....  0  1

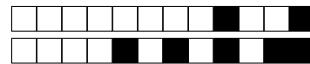
6)  $f'(t) = \frac{1+\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}}{t+\sqrt{t^2+1}}$  .....  0  1

$f'(t) = 1/(\sqrt{t^2+1})$  .....  0  1

$f \in E_1$  car  $f \in C^1([0, +\infty[)$  .....  0  1

et car  $f(0)=0$  .....  0  1

et car  $\int f'^2$  cv,  $N_2(f) = \sqrt{\pi/2}$  .....  0  1



- 7)  $f(t) \sim_0 t$  .....  0  1  
 $f(t) \sim_\infty \ln t$  .....  0  1  2

- 8)  $f \in E_1$  car  $t \mapsto (\frac{f(t)}{t})^2 \sim_0 1$  intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1  
et  $\sim_\infty \frac{\ln^2 t}{t^2}$  intégrable sur  $[1, +\infty[$  .....  0  1

- 9)a)  $-\ln t/(1-t^2)$  intégrable sur  $]0, 1[$  car cpm .....  0  1  
et  $\sim_0 -\ln t = 0(1/\sqrt{t})$  intégrable sur  $]0, \frac{1}{2}]$  .....  0  1  
et  $\sim_1 -(t-1)/(1-t^2) = 1/(t+1) \sim_1 1/2$  intégrable sur  $[\frac{1}{2}, 1[$  .....  0  1

- 9)b)  $-t^{2k} \ln t$  intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1  
 $\int = \frac{1}{(2k+1)^2}$  .....  0  1  2

- 9)c)  $J = \sum_0^\infty \int$  car  $\sum \int |.|$  converge .....  0  1  
et  $\sum -t^{2k} \ln t = -\frac{\ln t}{1-t^2}$  .....  0  1  
rappel des autres hypothèses .....  0  1

- 9)d)  $J = \pi^2/8$  .....  0  1  
justification .....  0  1

- 10)a)  $I = 2 \int \frac{f(t)}{t\sqrt{t^2+1}}$  .....  0  1  2

- 10)b)  $f$  bijective de  $\mathbb{R}_+^*$  dans  $\mathbb{R}_+^*$  ;  $f^{-1} = \text{sh}$  .....  0  1  2  3

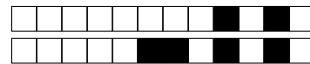
- 10)c) Justification cdv .....  0  1  
 $I = 2 \int \frac{u}{\text{sh} u}$  .....  0  1

- 10)d)  $I = 4J$  .....  0  1  
 $N_1(f) = \pi/\sqrt{2}$  .....  0  1  
 $\frac{N_1(f)}{N_2(f)} = \sqrt{\pi}$  .....  0  1
- 

- 11)a)  $h \rightarrow_0 \alpha$  .....  0  1  
 $g \rightarrow_0 0$  .....  0  1

- 11)b)  $f'(t) - \sqrt{t}g'(t) = h(t)/2$  .....  0  1  
11)c)  $\sqrt{t}g'(t) \rightarrow_0 \alpha/2$  .....  0  1

- $gg' \rightarrow_0 \alpha^2/2$  .....  0  1  
11)d)  $\int (f')^2 = g^2/2 + \int (\sqrt{t}g')^2 + \frac{1}{4} \int h^2$  .....  0  1  2  
justification des intégrabilités .....  0  1  
12)a)  $E_2 \subset E_1$  .....  0  1  2  
13)b)  $\sin \in E_1$  .....  0  1  2  
 $\sin \notin E_2$  .....  0  1  2  3  
..... .....  0  1  
..... .....  0  1  
..... .....  0  1



Nom : \_\_\_\_\_

## DS 2

Soin) .....  0  1  2  3

1)a) IPP :  $\int_2^x \frac{1}{\ln t} dt = \frac{x}{\ln x} + c_0 + \int_2^x g_0 ; c_0 = -\frac{2}{\ln 2} ; g_0(t) = \frac{1}{(\ln t)^2}$   0  1  2

1)b)  $R_0 = o_\infty(\int_2^x \frac{1}{\ln t} dt)$  car  $\int_2^x \frac{1}{\ln t} dt$  diverge .....  0  1

et  $\frac{1}{(\ln t)^2} = o(\frac{1}{\ln t})$  .....  0  1

et  $1/\ln$  positive .....  0  1

1)c)  $R_0 \sim_\infty \frac{x}{\ln x}$  .....  0  1

car  $\int \frac{1}{\ln t} - R_0 \sim \int \frac{1}{\ln t}$  .....  0  1

et  $c_0 = o(\frac{x}{\ln x})$  .....  0  1

2)a)  $c_n = -2 \sum_{k=0}^n \frac{k!}{(\ln 2)^{k+1}}$  et  $g_n(t) = \frac{(n+1)!}{(\ln t)^{n+2}}$  .....  0  1  2  3

2)b))  $R_{n+1} = o(R_n)$  car  $1/\ln^{n+2} \geq 0$  et  $1/\ln^{n+3} = o_\infty(1/\ln^{n+2})$  .....  0  1

et car  $1/\ln^{n+2}$  non intégrable en  $\infty$  .....  0  1

2)c)  $R_n \sim (n+1)! \frac{x}{(\ln x)^{n+2}}$  .....  0  1  2

2)d)  $\int_2^x \frac{1}{\ln t} = \sum_{k=0}^n \frac{k!x}{(\ln x)^{k+1}} + o_{x \rightarrow +\infty}(\frac{x}{(\ln x)^{n+1}})$  .....  0  1

1)  $\arctan \in E_1$  car s'annule en 0 et  $C^1$  .....  0  1

et  $(\frac{\arctan t}{t})^2$  cpm .....  0  1

et  $(\frac{\arctan t}{t})^2$  intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1

et  $(\frac{\arctan t}{t})^2$  intégrable sur  $[1, +\infty[$  .....  0  1

2)  $H_u : t \mapsto \frac{1}{(t^2+1)(t^2+u)}$  intégrable sur  $[0, \infty[$  car continue sur  $[0, \infty[$  .....  0  1

et  $\sim_\infty 1/t^4$  donc intégrable sur  $[1, \infty[$  .....  0  1

$f' = \frac{1}{1+t^2}$  donc (avec  $u=1$ )  $f \in E_2$  .....  0  1

3)a)  $\varphi(u) \rightarrow \varphi(1)$  en  $1^+$  car  $t \mapsto H_u(t)$  cpm sur  $[0, \infty[$  .....  0  1

et  $H_u(t) \rightarrow H_1(t)$  .....  0  1

majoration indépendante de  $u$  par  $H_1(t)$  ou  $\frac{1}{1+t^2}$  .....  0  1

penser aux valeurs absolues (ou fonction positive) .....  0  1

intégrabilité du majorant .....  0  1

3)b)  $\frac{1}{(T+1)(T+u^2)} = \frac{1}{u^2-1} (\frac{1}{T+1} - \frac{1}{T+u^2})$  .....  0  1

3)c)  $\varphi(x) = \frac{\pi}{2x(x+1)}$  pour  $x \neq 1$  bien simplifiée .....  0  1

pas simplifiée .....  0  1

3)d)  $N_2(f)^2 = \lim_{1+} \varphi$ , citer 3.a .....  0  1

$N_2(f) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$  .....  0  1

4)  $G_x : t \mapsto \frac{\arctan(xt)}{t(t^2+1)}$  intégrable sur  $]0, \infty[$  car cpm .....  0  1

et  $\sim_0 x$  donc intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1

et  $O_\infty(1/t^3)$  sur  $[1, +\infty[$  .....  0  1

équivalent en  $\infty$  faux quand  $x=0$  .....  0  1

5)a)  $x \neq 0$  ;  $\theta'(x) = \frac{1}{x^2} \varphi(\frac{1}{x})$  ou  $x\varphi(x)$  .....  0  1

$\theta'(x) = \frac{\pi}{2(x+1)}$  .....  0  1

$\theta'(0) = \frac{\pi}{2}$  .....  0  1

5)b) TFA .....  0  1

$\theta(x) = \frac{\pi}{2} \ln(1+x) + C$  .....  0  1

$C=0$  .....  0  1

5)c)  $N_1^2(f) = 2\theta(1)$  par IPP .....  0  1  2  3

5)d)  $N_1(f) = \sqrt{\pi \ln(2)}$  .....  0  1

$\frac{N_1(f)}{N_2(f)} = 2\sqrt{\ln(2)}$  .....  0  1

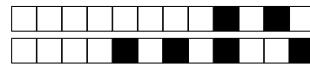
6)  $f'(t) = \frac{1+\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}}{t+\sqrt{t^2+1}}$  .....  0  1

$f'(t) = 1/(\sqrt{t^2+1})$  .....  0  1

$f \in E_1$  car  $f \in C^1([0, +\infty[)$  .....  0  1

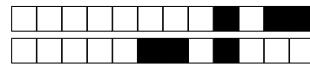
et car  $f(0)=0$  .....  0  1

et car  $\int f'^2$  cv,  $N_2(f) = \sqrt{\pi/2}$  .....  0  1



- 7)  $f(t) \sim_0 t$  .....  0  1  
 $f(t) \sim_\infty \ln t$  .....  0  1  2
- 8)  $f \in E_1$  car  $t \mapsto (\frac{f(t)}{t})^2 \sim_0 1$  intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1  
et  $\sim_\infty \frac{\ln^2 t}{t^2}$  intégrable sur  $[1, +\infty[$  .....  0  1
- 9)a)  $-\ln t/(1-t^2)$  intégrable sur  $]0, 1[$  car cpm .....  0  1  
et  $\sim_0 -\ln t = 0(1/\sqrt{t})$  intégrable sur  $]0, \frac{1}{2}]$  .....  0  1  
et  $\sim_1 -(t-1)/(1-t^2) = 1/(t+1) \sim_1 1/2$  intégrable sur  $[\frac{1}{2}, 1[$  .....  0  1
- 9)b)  $-t^{2k} \ln t$  intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1  
 $\int = \frac{1}{(2k+1)^2}$  .....  0  1  2
- 9)c)  $J = \sum_0^\infty \int$  car  $\sum \int |.|$  converge .....  0  1  
et  $\sum -t^{2k} \ln t = -\frac{\ln t}{1-t^2}$  .....  0  1  
rappel des autres hypothèses .....  0  1
- 9)d)  $J = \pi^2/8$  .....  0  1  
justification .....  0  1
- 10)a)  $I = 2 \int \frac{f(t)}{t\sqrt{t^2+1}}$  .....  0  1  2
- 10)b)  $f$  bijective de  $\mathbb{R}_+^*$  dans  $\mathbb{R}_+^*$  ;  $f^{-1} = \text{sh}$  .....  0  1  2  3
- 10)c) Justification cdv .....  0  1  
 $I = 2 \int \frac{u}{\text{sh} u}$  .....  0  1
- 10)d)  $I = 4J$  .....  0  1  
 $N_1(f) = \pi/\sqrt{2}$  .....  0  1  
 $\frac{N_1(f)}{N_2(f)} = \sqrt{\pi}$  .....  0  1
- 
- 11)a)  $h \rightarrow_0 \alpha$  .....  0  1  
 $g \rightarrow_0 0$  .....  0  1
- 11)b)  $f'(t) - \sqrt{t}g'(t) = h(t)/2$  .....  0  1
- 11)c)  $\sqrt{t}g'(t) \rightarrow_0 \alpha/2$  .....  0  1

- $gg' \rightarrow_0 \alpha^2/2$  .....  0  1
- 11)d)  $\int(f')^2 = g^2/2 + \int(\sqrt{t}g')^2 + \frac{1}{4} \int h^2$  .....  0  1  2  
justification des intégrabilités .....  0  1
- 12)a)  $E_2 \subset E_1$  .....  0  1  2
- 13)b)  $\sin \in E_1$  .....  0  1  2  
 $\sin \notin E_2$  .....  0  1  2  3  
..... .....  0  1  
..... .....  0  1  
..... .....  0  1



Nom : \_\_\_\_\_

## DS 2

Soin) .....  0  1  2  3

1)a) IPP :  $\int_2^x \frac{1}{\ln t} dt = \frac{x}{\ln x} + c_0 + \int_2^x g_0$  ;  $c_0 = -\frac{2}{\ln 2}$  ;  $g_0(t) = \frac{1}{(\ln t)^2}$   0  1  2

1)b)  $R_0 = o_\infty(\int_2^x \frac{1}{\ln t} dt)$  car  $\int_2^x \frac{1}{\ln t} dt$  diverge .....  0  1

et  $\frac{1}{(\ln t)^2} = o(\frac{1}{\ln t})$  .....  0  1

et  $1/\ln$  positive .....  0  1

1)c)  $R_0 \sim_\infty \frac{x}{\ln x}$  .....  0  1

car  $\int \frac{1}{\ln t} - R_0 \sim \int \frac{1}{\ln t}$  .....  0  1

et  $c_0 = o(\frac{x}{\ln x})$  .....  0  1

2)a)  $c_n = -2 \sum_0^n \frac{k!}{(\ln 2)^{k+1}}$  et  $g_n(t) = \frac{(n+1)!}{(\ln t)^{n+2}}$  .....  0  1  2  3

2)b))  $R_{n+1} = o(R_n)$  car  $1/\ln^{n+2} \geq 0$  et  $1/\ln^{n+3} = o_\infty(1/\ln^{n+2})$  .....  0  1

et car  $1/\ln^{n+2}$  non intégrable en  $\infty$  .....  0  1

2)c)  $R_n \sim (n+1)! \frac{x}{(\ln x)^{n+2}}$  .....  0  1  2

2)d)  $\int_2^x \frac{1}{\ln t} = \sum_{k=0}^n \frac{k!x}{(\ln x)^{k+1}} + o_{x \rightarrow +\infty}(\frac{x}{(\ln x)^{n+1}})$  .....  0  1

1)  $\arctan \in E_1$  car s'annule en 0 et  $C^1$  .....  0  1

et  $(\frac{\arctan t}{t})^2$  cpm .....  0  1

et  $(\frac{\arctan t}{t})^2$  intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1

et  $(\frac{\arctan t}{t})^2$  intégrable sur  $[1, +\infty[$  .....  0  1

2)  $H_u : t \mapsto \frac{1}{(t^2+1)(t^2+u)}$  intégrable sur  $[0, \infty[$  car continue sur  $[0, \infty[$  .....  0  1

et  $\sim_\infty 1/t^4$  donc intégrable sur  $[1, \infty[$  .....  0  1

$f' = \frac{1}{1+t^2}$  donc (avec  $u=1$ )  $f \in E_2$  .....  0  1

3)a)  $\varphi(u) \rightarrow \varphi(1)$  en  $1^+$  car  $t \mapsto H_u(t)$  cpm sur  $[0, \infty[$  .....  0  1

et  $H_u(t) \rightarrow H_1(t)$  .....  0  1

majoration indépendante de  $u$  par  $H_1(t)$  ou  $\frac{1}{1+t^2}$  .....  0  1

penser aux valeurs absolues (ou fonction positive) .....  0  1

intégrabilité du majorant .....  0  1

3)b)  $\frac{1}{(T+1)(T+u^2)} = \frac{1}{u^2-1} (\frac{1}{T+1} - \frac{1}{T+u^2})$  .....  0  1

3)c)  $\varphi(x) = \frac{\pi}{2x(x+1)}$  pour  $x \neq 1$  bien simplifiée .....  0  1

pas simplifiée .....  0  1

3)d)  $N_2(f)^2 = \lim_{1+} \varphi$ , citer 3.a .....  0  1

$N_2(f) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$  .....  0  1

4)  $G_x : t \mapsto \frac{\arctan(xt)}{t(t^2+1)}$  intégrable sur  $]0, \infty[$  car cpm .....  0  1

et  $\sim_0 x$  donc intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1

et  $O_\infty(1/t^3)$  sur  $[1, +\infty[$  .....  0  1

équivalent en  $\infty$  faux quand  $x=0$  .....  0  1

5)a)  $x \neq 0$  ;  $\theta'(x) = \frac{1}{x^2} \varphi(\frac{1}{x})$  ou  $x\varphi(x)$  .....  0  1

$\theta'(x) = \frac{\pi}{2(x+1)}$  .....  0  1

$\theta'(0) = \frac{\pi}{2}$  .....  0  1

5)b) TFA .....  0  1

$\theta(x) = \frac{\pi}{2} \ln(1+x) + C$  .....  0  1

$C=0$  .....  0  1

5)c)  $N_1^2(f) = 2\theta(1)$  par IPP .....  0  1  2  3

5)d)  $N_1(f) = \sqrt{\pi \ln(2)}$  .....  0  1

$\frac{N_1(f)}{N_2(f)} = 2\sqrt{\ln(2)}$  .....  0  1

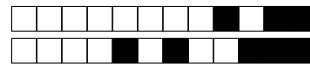
6)  $f'(t) = \frac{1+\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}}{t+\sqrt{t^2+1}}$  .....  0  1

$f'(t) = 1/(\sqrt{t^2+1})$  .....  0  1

$f \in E_1$  car  $f \in C^1([0, +\infty[)$  .....  0  1

et car  $f(0)=0$  .....  0  1

et car  $\int f'^2$  cv,  $N_2(f) = \sqrt{\pi/2}$  .....  0  1



- 7)  $f(t) \sim_0 t$  .....  0  1  
 $f(t) \sim_\infty \ln t$  .....  0  1  2

- 8)  $f \in E_1$  car  $t \mapsto (\frac{f(t)}{t})^2 \sim_0 1$  intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1  
et  $\sim_\infty \frac{\ln^2 t}{t^2}$  intégrable sur  $[1, +\infty[$  .....  0  1

- 9)a)  $-\ln t/(1-t^2)$  intégrable sur  $]0, 1[$  car cpm .....  0  1  
et  $\sim_0 -\ln t = 0(1/\sqrt{t})$  intégrable sur  $]0, \frac{1}{2}]$  .....  0  1  
et  $\sim_1 -(t-1)/(1-t^2) = 1/(t+1) \sim_1 1/2$  intégrable sur  $[\frac{1}{2}, 1[$  .....  0  1

- 9)b)  $-t^{2k} \ln t$  intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1  
 $\int = \frac{1}{(2k+1)^2}$  .....  0  1  2

- 9)c)  $J = \sum_0^\infty \int$  car  $\sum \int |.|$  converge .....  0  1  
et  $\sum -t^{2k} \ln t = -\frac{\ln t}{1-t^2}$  .....  0  1  
rappel des autres hypothèses .....  0  1

- 9)d)  $J = \pi^2/8$  .....  0  1  
justification .....  0  1

- 10)a)  $I = 2 \int \frac{f(t)}{t\sqrt{t^2+1}}$  .....  0  1  2

- 10)b)  $f$  bijective de  $\mathbb{R}_+^*$  dans  $\mathbb{R}_+^*$ ;  $f^{-1} = \text{sh}$  .....  0  1  2  3

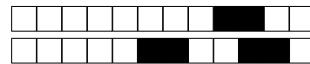
- 10)c) Justification cdv .....  0  1  
 $I = 2 \int \frac{u}{\text{sh} u}$  .....  0  1

- 10)d)  $I = 4J$  .....  0  1  
 $N_1(f) = \pi/\sqrt{2}$  .....  0  1  
 $\frac{N_1(f)}{N_2(f)} = \sqrt{\pi}$  .....  0  1
- 

- 11)a)  $h \rightarrow_0 \alpha$  .....  0  1  
 $g \rightarrow_0 0$  .....  0  1

- 11)b)  $f'(t) - \sqrt{t}g'(t) = h(t)/2$  .....  0  1  
11)c)  $\sqrt{t}g'(t) \rightarrow_0 \alpha/2$  .....  0  1

- $gg' \rightarrow_0 \alpha^2/2$  .....  0  1  
11)d)  $\int (f')^2 = g^2/2 + \int (\sqrt{t}g')^2 + \frac{1}{4} \int h^2$  .....  0  1  2  
justification des intégrabilités .....  0  1  
12)a)  $E_2 \subset E_1$  .....  0  1  2  
13)b)  $\sin \in E_1$  .....  0  1  2  
 $\sin \notin E_2$  .....  0  1  2  3  
..... .....  0  1  
..... .....  0  1  
..... .....  0  1



Nom : \_\_\_\_\_

## DS 2

Soin) .....  0  1  2  3

1)a) IPP :  $\int_2^x \frac{1}{\ln t} dt = \frac{x}{\ln x} + c_0 + \int_2^x g_0$  ;  $c_0 = -\frac{2}{\ln 2}$  ;  $g_0(t) = \frac{1}{(\ln t)^2}$   0  1  2

1)b)  $R_0 = o_\infty(\int_2^x \frac{1}{\ln t} dt)$  car  $\int_2^x \frac{1}{\ln t} dt$  diverge .....  0  1

et  $\frac{1}{(\ln t)^2} = o(\frac{1}{\ln t})$  .....  0  1

et  $1/\ln$  positive .....  0  1

1)c)  $R_0 \sim_\infty \frac{x}{\ln x}$  .....  0  1

car  $\int \frac{1}{\ln t} - R_0 \sim \int \frac{1}{\ln t}$  .....  0  1

et  $c_0 = o(\frac{x}{\ln x})$  .....  0  1

2)a)  $c_n = -2 \sum_0^n \frac{k!}{(\ln 2)^{k+1}}$  et  $g_n(t) = \frac{(n+1)!}{(\ln t)^{n+2}}$  .....  0  1  2  3

2)b))  $R_{n+1} = o(R_n)$  car  $1/\ln^{n+2} \geq 0$  et  $1/\ln^{n+3} = o_\infty(1/\ln^{n+2})$  .....  0  1

et car  $1/\ln^{n+2}$  non intégrable en  $\infty$  .....  0  1

2)c)  $R_n \sim (n+1)! \frac{x}{(\ln x)^{n+2}}$  .....  0  1  2

2)d)  $\int_2^x \frac{1}{\ln t} = \sum_{k=0}^n \frac{k!x}{(\ln x)^{k+1}} + o_{x \rightarrow +\infty}(\frac{x}{(\ln x)^{n+1}})$  .....  0  1

1)  $\arctan \in E_1$  car s'annule en 0 et  $C^1$  .....  0  1

et  $(\frac{\arctan t}{t})^2$  cpm .....  0  1

et  $(\frac{\arctan t}{t})^2$  intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1

et  $(\frac{\arctan t}{t})^2$  intégrable sur  $[1, +\infty[$  .....  0  1

2)  $H_u : t \mapsto \frac{1}{(t^2+1)(t^2+u)}$  intégrable sur  $[0, \infty[$  car continue sur  $[0, \infty[$  .....  0  1

et  $\sim_\infty 1/t^4$  donc intégrable sur  $[1, \infty[$  .....  0  1

$f' = \frac{1}{1+t^2}$  donc (avec  $u=1$ )  $f \in E_2$  .....  0  1

3)a)  $\varphi(u) \rightarrow \varphi(1)$  en  $1^+$  car  $t \mapsto H_u(t)$  cpm sur  $[0, \infty[$  .....  0  1

et  $H_u(t) \rightarrow H_1(t)$  .....  0  1

majoration indépendante de  $u$  par  $H_1(t)$  ou  $\frac{1}{1+t^2}$  .....  0  1

penser aux valeurs absolues (ou fonction positive) .....  0  1

intégrabilité du majorant .....  0  1

3)b)  $\frac{1}{(T+1)(T+u^2)} = \frac{1}{u^2-1} (\frac{1}{T+1} - \frac{1}{T+u^2})$  .....  0  1

3)c)  $\varphi(x) = \frac{\pi}{2x(x+1)}$  pour  $x \neq 1$  bien simplifiée .....  0  1

pas simplifiée .....  0  1

3)d)  $N_2(f)^2 = \lim_{1+} \varphi$ , citer 3.a .....  0  1

$N_2(f) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$  .....  0  1

4)  $G_x : t \mapsto \frac{\arctan(xt)}{t(t^2+1)}$  intégrable sur  $]0, \infty[$  car cpm .....  0  1

et  $\sim_0 x$  donc intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1

et  $O_\infty(1/t^3)$  sur  $[1, +\infty[$  .....  0  1

équivalent en  $\infty$  faux quand  $x=0$  .....  0  1

5)a)  $x \neq 0$  ;  $\theta'(x) = \frac{1}{x^2} \varphi(\frac{1}{x})$  ou  $x\varphi(x)$  .....  0  1

$\theta'(x) = \frac{\pi}{2(x+1)}$  .....  0  1

$\theta'(0) = \frac{\pi}{2}$  .....  0  1

5)b) TFA .....  0  1

$\theta(x) = \frac{\pi}{2} \ln(1+x) + C$  .....  0  1

$C = 0$  .....  0  1

5)c)  $N_1^2(f) = 2\theta(1)$  par IPP .....  0  1  2  3

5)d)  $N_1(f) = \sqrt{\pi \ln(2)}$  .....  0  1

$\frac{N_1(f)}{N_2(f)} = 2\sqrt{\ln(2)}$  .....  0  1

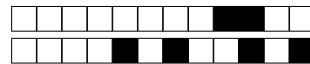
6)  $f'(t) = \frac{1+\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}}{t+\sqrt{t^2+1}}$  .....  0  1

$f'(t) = 1/(\sqrt{t^2+1})$  .....  0  1

$f \in E_1$  car  $f \in C^1([0, +\infty[)$  .....  0  1

et car  $f(0)=0$  .....  0  1

et car  $\int f'^2$  cv,  $N_2(f) = \sqrt{\pi/2}$  .....  0  1



- 7)  $f(t) \sim_0 t$  .....  0  1  
 $f(t) \sim_\infty \ln t$  .....  0  1  2

8)  $f \in E_1$  car  $t \mapsto (\frac{f(t)}{t})^2 \sim_0 1$  intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1  
et  $\sim_\infty \frac{\ln^2 t}{t^2}$  intégrable sur  $[1, +\infty[$  .....  0  1

9)a)  $-\ln t/(1-t^2)$  intégrable sur  $]0, 1[$  car cpm .....  0  1  
et  $\sim_0 -\ln t = 0(1/\sqrt{t})$  intégrable sur  $]0, \frac{1}{2}]$  .....  0  1  
et  $\sim_1 -(t-1)/(1-t^2) = 1/(t+1) \sim_1 1/2$  intégrable sur  $[\frac{1}{2}, 1[$  .....  0  1

9)b)  $-t^{2k} \ln t$  intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1  
 $\int = \frac{1}{(2k+1)^2}$  .....  0  1  2

9)c)  $J = \sum_0^\infty \int$  car  $\sum \int |.|$  converge .....  0  1  
et  $\sum -t^{2k} \ln t = -\frac{\ln t}{1-t^2}$  .....  0  1  
rappel des autres hypothèses .....  0  1

9)d)  $J = \pi^2/8$  .....  0  1  
justification .....  0  1

10)a)  $I = 2 \int \frac{f(t)}{t\sqrt{t^2+1}}$  .....  0  1  2

10)b)  $f$  bijective de  $\mathbb{R}_+^*$  dans  $\mathbb{R}_+^*$  ;  $f^{-1} = \text{sh}$  .....  0  1  2  3

10)c) Justification cdv .....  0  1  
 $I = 2 \int \frac{u}{\text{sh} u}$  .....  0  1

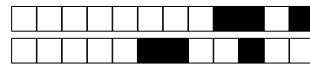
10)d)  $I = 4J$  .....  0  1  
 $N_1(f) = \pi/\sqrt{2}$  .....  0  1  
 $\frac{N_1(f)}{N_2(f)} = \sqrt{\pi}$  .....  0  1

---

11)a)  $h \rightarrow_0 \alpha$  .....  0  1  
 $g \rightarrow_0 0$  .....  0  1

11)b)  $f'(t) - \sqrt{t}g'(t) = h(t)/2$  .....  0  1  
11)c)  $\sqrt{t}g'(t) \rightarrow_0 \alpha/2$  .....  0  1

- $gg' \rightarrow_0 \alpha^2/2$  .....  0  1  
11)d)  $\int (f')^2 = g^2/2 + \int (\sqrt{t}g')^2 + \frac{1}{4} \int h^2$  .....  0  1  2  
justification des intégrabilités .....  0  1  
12)a)  $E_2 \subset E_1$  .....  0  1  2  
13)b)  $\sin \in E_1$  .....  0  1  2  
 $\sin \notin E_2$  .....  0  1  2  3  
..... .....  0  1  
..... .....  0  1  
..... .....  0  1



Nom : \_\_\_\_\_

## DS 2

Soin) .....  0  1  2  3

1)a) IPP :  $\int_2^x \frac{1}{\ln t} dt = \frac{x}{\ln x} + c_0 + \int_2^x g_0$  ;  $c_0 = -\frac{2}{\ln 2}$  ;  $g_0(t) = \frac{1}{(\ln t)^2}$   0  1  2

1)b)  $R_0 = o_\infty(\int_2^x \frac{1}{\ln t} dt)$  car  $\int_2^x \frac{1}{\ln t} dt$  diverge .....  0  1

et  $\frac{1}{(\ln t)^2} = o(\frac{1}{\ln t})$  .....  0  1

et  $1/\ln$  positive .....  0  1

1)c)  $R_0 \sim_\infty \frac{x}{\ln x}$  .....  0  1

car  $\int \frac{1}{\ln t} - R_0 \sim \int \frac{1}{\ln t}$  .....  0  1

et  $c_0 = o(\frac{x}{\ln x})$  .....  0  1

2)a)  $c_n = -2 \sum_{k=0}^n \frac{k!}{(\ln 2)^{k+1}}$  et  $g_n(t) = \frac{(n+1)!}{(\ln t)^{n+2}}$  .....  0  1  2  3

2)b))  $R_{n+1} = o(R_n)$  car  $1/\ln^{n+2} \geq 0$  et  $1/\ln^{n+3} = o_\infty(1/\ln^{n+2})$  .....  0  1

et car  $1/\ln^{n+2}$  non intégrable en  $\infty$  .....  0  1

2)c)  $R_n \sim (n+1)! \frac{x}{(\ln x)^{n+2}}$  .....  0  1  2

2)d)  $\int_2^x \frac{1}{\ln t} = \sum_{k=0}^n \frac{k!x}{(\ln x)^{k+1}} + o_{x \rightarrow +\infty}(\frac{x}{(\ln x)^{n+1}})$  .....  0  1

1)  $\arctan \in E_1$  car s'annule en 0 et  $C^1$  .....  0  1

et  $(\frac{\arctan t}{t})^2$  cpm .....  0  1

et  $(\frac{\arctan t}{t})^2$  intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1

et  $(\frac{\arctan t}{t})^2$  intégrable sur  $[1, +\infty[$  .....  0  1

2)  $H_u : t \mapsto \frac{1}{(t^2+1)(t^2+u)}$  intégrable sur  $[0, \infty[$  car continue sur  $[0, \infty[$  .....  0  1

et  $\sim_\infty 1/t^4$  donc intégrable sur  $[1, \infty[$  .....  0  1

$f' = \frac{1}{1+t^2}$  donc (avec  $u=1$ )  $f \in E_2$  .....  0  1

3)a)  $\varphi(u) \rightarrow \varphi(1)$  en  $1^+$  car  $t \mapsto H_u(t)$  cpm sur  $[0, \infty[$  .....  0  1

et  $H_u(t) \rightarrow H_1(t)$  .....  0  1

majoration indépendante de  $u$  par  $H_1(t)$  ou  $\frac{1}{1+t^2}$  .....  0  1

penser aux valeurs absolues (ou fonction positive) .....  0  1

intégrabilité du majorant .....  0  1

3)b)  $\frac{1}{(T+1)(T+u^2)} = \frac{1}{u^2-1} (\frac{1}{T+1} - \frac{1}{T+u^2})$  .....  0  1

3)c)  $\varphi(x) = \frac{\pi}{2x(x+1)}$  pour  $x \neq 1$  bien simplifiée .....  0  1

pas simplifiée .....  0  1

3)d)  $N_2(f)^2 = \lim_{1+} \varphi$ , citer 3.a .....  0  1

$N_2(f) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$  .....  0  1

4)  $G_x : t \mapsto \frac{\arctan(xt)}{t(t^2+1)}$  intégrable sur  $]0, \infty[$  car cpm .....  0  1

et  $\sim_0 x$  donc intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1

et  $O_\infty(1/t^3)$  sur  $[1, +\infty[$  .....  0  1

équivalent en  $\infty$  faux quand  $x=0$  .....  0  1

5)a)  $x \neq 0$  ;  $\theta'(x) = \frac{1}{x^2} \varphi(\frac{1}{x})$  ou  $x\varphi(x)$  .....  0  1

$\theta'(x) = \frac{\pi}{2(x+1)}$  .....  0  1

$\theta'(0) = \frac{\pi}{2}$  .....  0  1

5)b) TFA .....  0  1

$\theta(x) = \frac{\pi}{2} \ln(1+x) + C$  .....  0  1

$C = 0$  .....  0  1

5)c)  $N_1^2(f) = 2\theta(1)$  par IPP .....  0  1  2  3

5)d)  $N_1(f) = \sqrt{\pi \ln(2)}$  .....  0  1

$\frac{N_1(f)}{N_2(f)} = 2\sqrt{\ln(2)}$  .....  0  1

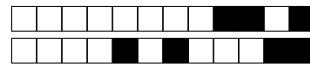
6)  $f'(t) = \frac{1+\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}}{t+\sqrt{t^2+1}}$  .....  0  1

$f'(t) = 1/(\sqrt{t^2+1})$  .....  0  1

$f \in E_1$  car  $f \in C^1([0, +\infty[)$  .....  0  1

et car  $f(0)=0$  .....  0  1

et car  $\int f'^2$  cv,  $N_2(f) = \sqrt{\pi/2}$  .....  0  1



- 7)  $f(t) \sim_0 t$  .....  0  1  
 $f(t) \sim_\infty \ln t$  .....  0  1  2

- 8)  $f \in E_1$  car  $t \mapsto (\frac{f(t)}{t})^2 \sim_0 1$  intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1  
et  $\sim_\infty \frac{\ln^2 t}{t^2}$  intégrable sur  $[1, +\infty[$  .....  0  1

- 9)a)  $-\ln t/(1-t^2)$  intégrable sur  $]0, 1[$  car cpm .....  0  1  
et  $\sim_0 -\ln t = 0(1/\sqrt{t})$  intégrable sur  $]0, \frac{1}{2}]$  .....  0  1  
et  $\sim_1 -(t-1)/(1-t^2) = 1/(t+1) \sim_1 1/2$  intégrable sur  $[\frac{1}{2}, 1[$  .....  0  1

- 9)b)  $-t^{2k} \ln t$  intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1  
 $\int = \frac{1}{(2k+1)^2}$  .....  0  1  2

- 9)c)  $J = \sum_0^\infty \int$  car  $\sum \int |.|$  converge .....  0  1  
et  $\sum -t^{2k} \ln t = -\frac{\ln t}{1-t^2}$  .....  0  1  
rappel des autres hypothèses .....  0  1

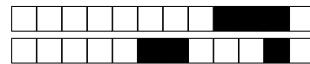
- 9)d)  $J = \pi^2/8$  .....  0  1  
justification .....  0  1

- 10)a)  $I = 2 \int \frac{f(t)}{t\sqrt{t^2+1}}$  .....  0  1  2  
10)b)  $f$  bijective de  $\mathbb{R}_+^*$  dans  $\mathbb{R}_+^*$  ;  $f^{-1} = \text{sh}$  .....  0  1  2  3  
10)c) Justification cdv .....  0  1  
 $I = 2 \int \frac{u}{\text{sh} u}$  .....  0  1

- 10)d)  $I = 4J$  .....  0  1  
 $N_1(f) = \pi/\sqrt{2}$  .....  0  1  
 $\frac{N_1(f)}{N_2(f)} = \sqrt{\pi}$  .....  0  1
- 

- 11)a)  $h \rightarrow_0 \alpha$  .....  0  1  
 $g \rightarrow_0 0$  .....  0  1  
11)b)  $f'(t) - \sqrt{t}g'(t) = h(t)/2$  .....  0  1  
11)c)  $\sqrt{t}g'(t) \rightarrow_0 \alpha/2$  .....  0  1

- $gg' \rightarrow_0 \alpha^2/2$  .....  0  1  
11)d)  $\int (f')^2 = g^2/2 + \int (\sqrt{t}g')^2 + \frac{1}{4} \int h^2$  .....  0  1  2  
justification des intégrabilités .....  0  1  
12)a)  $E_2 \subset E_1$  .....  0  1  2  
13)b)  $\sin \in E_1$  .....  0  1  2  
 $\sin \notin E_2$  .....  0  1  2  3  
..... .....  0  1  
..... .....  0  1  
..... .....  0  1



Nom : \_\_\_\_\_

## DS 2

Soin) .....  0  1  2  3

1)a) IPP :  $\int_2^x \frac{1}{\ln t} dt = \frac{x}{\ln x} + c_0 + \int_2^x g_0$  ;  $c_0 = -\frac{2}{\ln 2}$  ;  $g_0(t) = \frac{1}{(\ln t)^2}$   0  1  2

1)b)  $R_0 = o_\infty(\int_2^x \frac{1}{\ln t} dt)$  car  $\int_2^x \frac{1}{\ln t} dt$  diverge .....  0  1

et  $\frac{1}{(\ln t)^2} = o(\frac{1}{\ln t})$  .....  0  1

et  $1/\ln$  positive .....  0  1

1)c)  $R_0 \sim_\infty \frac{x}{\ln x}$  .....  0  1

car  $\int \frac{1}{\ln t} - R_0 \sim \int \frac{1}{\ln t}$  .....  0  1

et  $c_0 = o(\frac{x}{\ln x})$  .....  0  1

2)a)  $c_n = -2 \sum_{k=0}^n \frac{k!}{(\ln 2)^{k+1}}$  et  $g_n(t) = \frac{(n+1)!}{(\ln t)^{n+2}}$  .....  0  1  2  3

2)b))  $R_{n+1} = o(R_n)$  car  $1/\ln^{n+2} \geq 0$  et  $1/\ln^{n+3} = o_\infty(1/\ln^{n+2})$  .....  0  1

et car  $1/\ln^{n+2}$  non intégrable en  $\infty$  .....  0  1

2)c)  $R_n \sim (n+1)! \frac{x}{(\ln x)^{n+2}}$  .....  0  1  2

2)d)  $\int_2^x \frac{1}{\ln t} = \sum_{k=0}^n \frac{k!x}{(\ln x)^{k+1}} + o_{x \rightarrow +\infty}(\frac{x}{(\ln x)^{n+1}})$  .....  0  1

1)  $\arctan \in E_1$  car s'annule en 0 et  $C^1$  .....  0  1

et  $(\frac{\arctan t}{t})^2$  cpm .....  0  1

et  $(\frac{\arctan t}{t})^2$  intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1

et  $(\frac{\arctan t}{t})^2$  intégrable sur  $[1, +\infty[$  .....  0  1

2)  $H_u : t \mapsto \frac{1}{(t^2+1)(t^2+u)}$  intégrable sur  $[0, \infty[$  car continue sur  $[0, \infty[$  .....  0  1

et  $\sim_\infty 1/t^4$  donc intégrable sur  $[1, \infty[$  .....  0  1

$f' = \frac{1}{1+t^2}$  donc (avec  $u=1$ )  $f \in E_2$  .....  0  1

3)a)  $\varphi(u) \rightarrow \varphi(1)$  en  $1^+$  car  $t \mapsto H_u(t)$  cpm sur  $[0, \infty[$  .....  0  1

et  $H_u(t) \rightarrow H_1(t)$  .....  0  1

majoration indépendante de  $u$  par  $H_1(t)$  ou  $\frac{1}{1+t^2}$  .....  0  1

penser aux valeurs absolues (ou fonction positive) .....  0  1

intégrabilité du majorant .....  0  1

3)b)  $\frac{1}{(T+1)(T+u^2)} = \frac{1}{u^2-1} (\frac{1}{T+1} - \frac{1}{T+u^2})$  .....  0  1

3)c)  $\varphi(x) = \frac{\pi}{2x(x+1)}$  pour  $x \neq 1$  bien simplifiée .....  0  1

pas simplifiée .....  0  1

3)d)  $N_2(f)^2 = \lim_{1+} \varphi$ , citer 3.a .....  0  1

$N_2(f) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$  .....  0  1

4)  $G_x : t \mapsto \frac{\arctan(xt)}{t(t^2+1)}$  intégrable sur  $]0, \infty[$  car cpm .....  0  1

et  $\sim_0 x$  donc intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1

et  $O_\infty(1/t^3)$  sur  $[1, +\infty[$  .....  0  1

équivalent en  $\infty$  faux quand  $x=0$  .....  0  1

5)a)  $x \neq 0$  ;  $\theta'(x) = \frac{1}{x^2} \varphi(\frac{1}{x})$  ou  $x\varphi(x)$  .....  0  1

$\theta'(x) = \frac{\pi}{2(x+1)}$  .....  0  1

$\theta'(0) = \frac{\pi}{2}$  .....  0  1

5)b) TFA .....  0  1

$\theta(x) = \frac{\pi}{2} \ln(1+x) + C$  .....  0  1

$C=0$  .....  0  1

5)c)  $N_1^2(f) = 2\theta(1)$  par IPP .....  0  1  2  3

5)d)  $N_1(f) = \sqrt{\pi \ln(2)}$  .....  0  1

$\frac{N_1(f)}{N_2(f)} = 2\sqrt{\ln(2)}$  .....  0  1

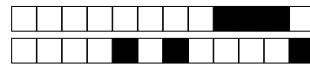
6)  $f'(t) = \frac{1+\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}}{t+\sqrt{t^2+1}}$  .....  0  1

$f'(t) = 1/(\sqrt{t^2+1})$  .....  0  1

$f \in E_1$  car  $f \in C^1([0, +\infty[)$  .....  0  1

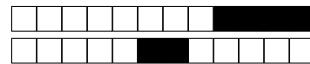
et car  $f(0)=0$  .....  0  1

et car  $\int f'^2$  cv,  $N_2(f) = \sqrt{\pi/2}$  .....  0  1



- 7)  $f(t) \sim_0 t$  .....  0  1  
 $f(t) \sim_\infty \ln t$  .....  0  1  2
- 8)  $f \in E_1$  car  $t \mapsto (\frac{f(t)}{t})^2 \sim_0 1$  intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1  
et  $\sim_\infty \frac{\ln^2 t}{t^2}$  intégrable sur  $[1, +\infty[$  .....  0  1
- 9)a)  $-\ln t/(1-t^2)$  intégrable sur  $]0, 1[$  car cpm .....  0  1  
et  $\sim_0 -\ln t = 0(1/\sqrt{t})$  intégrable sur  $]0, \frac{1}{2}]$  .....  0  1  
et  $\sim_1 -(t-1)/(1-t^2) = 1/(t+1) \sim_1 1/2$  intégrable sur  $[\frac{1}{2}, 1[$  .....  0  1
- 9)b)  $-t^{2k} \ln t$  intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1  
 $\int = \frac{1}{(2k+1)^2}$  .....  0  1  2
- 9)c)  $J = \sum_0^\infty \int$  car  $\sum \int |.|$  converge .....  0  1  
et  $\sum -t^{2k} \ln t = -\frac{\ln t}{1-t^2}$  .....  0  1  
rappel des autres hypothèses .....  0  1
- 9)d)  $J = \pi^2/8$  .....  0  1  
justification .....  0  1
- 10)a)  $I = 2 \int \frac{f(t)}{t\sqrt{t^2+1}}$  .....  0  1  2
- 10)b)  $f$  bijective de  $\mathbb{R}_+^*$  dans  $\mathbb{R}_+^*$  ;  $f^{-1} = \text{sh}$  .....  0  1  2  3
- 10)c) Justification cdv .....  0  1  
 $I = 2 \int \frac{u}{\text{sh} u}$  .....  0  1
- 10)d)  $I = 4J$  .....  0  1  
 $N_1(f) = \pi/\sqrt{2}$  .....  0  1  
 $\frac{N_1(f)}{N_2(f)} = \sqrt{\pi}$  .....  0  1
- 
- 11)a)  $h \rightarrow_0 \alpha$  .....  0  1  
 $g \rightarrow_0 0$  .....  0  1
- 11)b)  $f'(t) - \sqrt{t}g'(t) = h(t)/2$  .....  0  1
- 11)c)  $\sqrt{t}g'(t) \rightarrow_0 \alpha/2$  .....  0  1

- $gg' \rightarrow_0 \alpha^2/2$  .....  0  1
- 11)d)  $\int(f')^2 = g^2/2 + \int(\sqrt{t}g')^2 + \frac{1}{4} \int h^2$  .....  0  1  2  
justification des intégrabilités .....  0  1
- 12)a)  $E_2 \subset E_1$  .....  0  1  2
- 13)b)  $\sin \in E_1$  .....  0  1  2  
 $\sin \notin E_2$  .....  0  1  2  3  
..... .....  0  1  
..... .....  0  1  
..... .....  0  1



Nom : \_\_\_\_\_

## DS 2

Soin) .....  0  1  2  3

1)a) IPP :  $\int_2^x \frac{1}{\ln t} dt = \frac{x}{\ln x} + c_0 + \int_2^x g_0$  ;  $c_0 = -\frac{2}{\ln 2}$  ;  $g_0(t) = \frac{1}{(\ln t)^2}$   0  1  2

1)b)  $R_0 = o_\infty(\int_2^x \frac{1}{\ln t} dt)$  car  $\int_2^x \frac{1}{\ln t} dt$  diverge .....  0  1

et  $\frac{1}{(\ln t)^2} = o(\frac{1}{\ln t})$  .....  0  1

et  $1/\ln$  positive .....  0  1

1)c)  $R_0 \sim_\infty \frac{x}{\ln x}$  .....  0  1

car  $\int \frac{1}{\ln t} - R_0 \sim \int \frac{1}{\ln t}$  .....  0  1

et  $c_0 = o(\frac{x}{\ln x})$  .....  0  1

2)a)  $c_n = -2 \sum_0^n \frac{k!}{(\ln 2)^{k+1}}$  et  $g_n(t) = \frac{(n+1)!}{(\ln t)^{n+2}}$  .....  0  1  2  3

2)b))  $R_{n+1} = o(R_n)$  car  $1/\ln^{n+2} \geq 0$  et  $1/\ln^{n+3} = o_\infty(1/\ln^{n+2})$  .....  0  1

et car  $1/\ln^{n+2}$  non intégrable en  $\infty$  .....  0  1

2)c)  $R_n \sim (n+1)! \frac{x}{(\ln x)^{n+2}}$  .....  0  1  2

2)d)  $\int_2^x \frac{1}{\ln t} = \sum_{k=0}^n \frac{k!x}{(\ln x)^{k+1}} + o_{x \rightarrow +\infty}(\frac{x}{(\ln x)^{n+1}})$  .....  0  1

1)  $\arctan \in E_1$  car s'annule en 0 et  $C^1$  .....  0  1

et  $(\frac{\arctan t}{t})^2$  cpm .....  0  1

et  $(\frac{\arctan t}{t})^2$  intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1

et  $(\frac{\arctan t}{t})^2$  intégrable sur  $[1, +\infty[$  .....  0  1

2)  $H_u : t \mapsto \frac{1}{(t^2+1)(t^2+u)}$  intégrable sur  $[0, \infty[$  car continue sur  $[0, \infty[$  .....  0  1

et  $\sim_\infty 1/t^4$  donc intégrable sur  $[1, \infty[$  .....  0  1

$f' = \frac{1}{1+t^2}$  donc (avec  $u=1$ )  $f \in E_2$  .....  0  1

3)a)  $\varphi(u) \rightarrow \varphi(1)$  en  $1^+$  car  $t \mapsto H_u(t)$  cpm sur  $[0, \infty[$  .....  0  1

et  $H_u(t) \rightarrow H_1(t)$  .....  0  1

majoration indépendante de  $u$  par  $H_1(t)$  ou  $\frac{1}{1+t^2}$  .....  0  1

penser aux valeurs absolues (ou fonction positive) .....  0  1

intégrabilité du majorant .....  0  1

3)b)  $\frac{1}{(T+1)(T+u^2)} = \frac{1}{u^2-1} (\frac{1}{T+1} - \frac{1}{T+u^2})$  .....  0  1

3)c)  $\varphi(x) = \frac{\pi}{2x(x+1)}$  pour  $x \neq 1$  bien simplifiée .....  0  1

pas simplifiée .....  0  1

3)d)  $N_2(f)^2 = \lim_{1+} \varphi$ , citer 3.a .....  0  1

$N_2(f) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$  .....  0  1

4)  $G_x : t \mapsto \frac{\arctan(xt)}{t(t^2+1)}$  intégrable sur  $]0, \infty[$  car cpm .....  0  1

et  $\sim_0 x$  donc intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1

et  $O_\infty(1/t^3)$  sur  $[1, +\infty[$  .....  0  1

équivalent en  $\infty$  faux quand  $x=0$  .....  0  1

5)a)  $x \neq 0$  ;  $\theta'(x) = \frac{1}{x^2} \varphi(\frac{1}{x})$  ou  $x\varphi(x)$  .....  0  1

$\theta'(x) = \frac{\pi}{2(x+1)}$  .....  0  1

$\theta'(0) = \frac{\pi}{2}$  .....  0  1

5)b) TFA .....  0  1

$\theta(x) = \frac{\pi}{2} \ln(1+x) + C$  .....  0  1

$C=0$  .....  0  1

5)c)  $N_1^2(f) = 2\theta(1)$  par IPP .....  0  1  2  3

5)d)  $N_1(f) = \sqrt{\pi \ln(2)}$  .....  0  1

$\frac{N_1(f)}{N_2(f)} = 2\sqrt{\ln(2)}$  .....  0  1

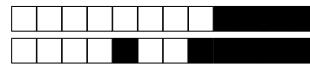
6)  $f'(t) = \frac{1+\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}}{t+\sqrt{t^2+1}}$  .....  0  1

$f'(t) = 1/(\sqrt{t^2+1})$  .....  0  1

$f \in E_1$  car  $f \in C^1([0, +\infty[)$  .....  0  1

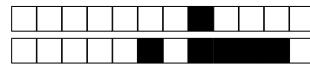
et car  $f(0)=0$  .....  0  1

et car  $\int f'^2$  cv,  $N_2(f) = \sqrt{\pi/2}$  .....  0  1



- 7)  $f(t) \sim_0 t$  .....  0  1  
 $f(t) \sim_\infty \ln t$  .....  0  1  2
- 8)  $f \in E_1$  car  $t \mapsto (\frac{f(t)}{t})^2 \sim_0 1$  intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1  
et  $\sim_\infty \frac{\ln^2 t}{t^2}$  intégrable sur  $[1, +\infty[$  .....  0  1
- 9)a)  $-\ln t/(1-t^2)$  intégrable sur  $]0, 1[$  car cpm .....  0  1  
et  $\sim_0 -\ln t = 0(1/\sqrt{t})$  intégrable sur  $]0, \frac{1}{2}]$  .....  0  1  
et  $\sim_1 -(t-1)/(1-t^2) = 1/(t+1) \sim_1 1/2$  intégrable sur  $[\frac{1}{2}, 1[$  .....  0  1
- 9)b)  $-t^{2k} \ln t$  intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1  
 $\int = \frac{1}{(2k+1)^2}$  .....  0  1  2
- 9)c)  $J = \sum_0^\infty \int$  car  $\sum \int |.|$  converge .....  0  1  
et  $\sum -t^{2k} \ln t = -\frac{\ln t}{1-t^2}$  .....  0  1  
rappel des autres hypothèses .....  0  1
- 9)d)  $J = \pi^2/8$  .....  0  1  
justification .....  0  1
- 10)a)  $I = 2 \int \frac{f(t)}{t\sqrt{t^2+1}}$  .....  0  1  2
- 10)b)  $f$  bijective de  $\mathbb{R}_+^*$  dans  $\mathbb{R}_+^*$  ;  $f^{-1} = \text{sh}$  .....  0  1  2  3
- 10)c) Justification cdv .....  0  1  
 $I = 2 \int \frac{u}{\text{sh} u}$  .....  0  1
- 10)d)  $I = 4J$  .....  0  1  
 $N_1(f) = \pi/\sqrt{2}$  .....  0  1  
 $\frac{N_1(f)}{N_2(f)} = \sqrt{\pi}$  .....  0  1
- 
- 11)a)  $h \rightarrow_0 \alpha$  .....  0  1  
 $g \rightarrow_0 0$  .....  0  1
- 11)b)  $f'(t) - \sqrt{t}g'(t) = h(t)/2$  .....  0  1
- 11)c)  $\sqrt{t}g'(t) \rightarrow_0 \alpha/2$  .....  0  1

- $gg' \rightarrow_0 \alpha^2/2$  .....  0  1
- 11)d)  $\int(f')^2 = g^2/2 + \int(\sqrt{t}g')^2 + \frac{1}{4} \int h^2$  .....  0  1  2  
justification des intégrabilités .....  0  1
- 12)a)  $E_2 \subset E_1$  .....  0  1  2
- 13)b)  $\sin \in E_1$  .....  0  1  2  
 $\sin \notin E_2$  .....  0  1  2  3  
..... .....  0  1  
..... .....  0  1  
..... .....  0  1



Nom : \_\_\_\_\_

## DS 2

Soin) .....  0  1  2  3

1)a) IPP :  $\int_2^x \frac{1}{\ln t} dt = \frac{x}{\ln x} + c_0 + \int_2^x g_0$  ;  $c_0 = -\frac{2}{\ln 2}$  ;  $g_0(t) = \frac{1}{(\ln t)^2}$   0  1  2

1)b)  $R_0 = o_\infty(\int_2^x \frac{1}{\ln t} dt)$  car  $\int_2^x \frac{1}{\ln t} dt$  diverge .....  0  1

et  $\frac{1}{(\ln t)^2} = o(\frac{1}{\ln t})$  .....  0  1

et  $1/\ln$  positive .....  0  1

1)c)  $R_0 \sim_\infty \frac{x}{\ln x}$  .....  0  1

car  $\int \frac{1}{\ln t} - R_0 \sim \int \frac{1}{\ln t}$  .....  0  1

et  $c_0 = o(\frac{x}{\ln x})$  .....  0  1

2)a)  $c_n = -2 \sum_{k=0}^n \frac{k!}{(\ln 2)^{k+1}}$  et  $g_n(t) = \frac{(n+1)!}{(\ln t)^{n+2}}$  .....  0  1  2  3

2)b))  $R_{n+1} = o(R_n)$  car  $1/\ln^{n+2} \geq 0$  et  $1/\ln^{n+3} = o_\infty(1/\ln^{n+2})$  .....  0  1

et car  $1/\ln^{n+2}$  non intégrable en  $\infty$  .....  0  1

2)c)  $R_n \sim (n+1)! \frac{x}{(\ln x)^{n+2}}$  .....  0  1  2

2)d)  $\int_2^x \frac{1}{\ln t} = \sum_{k=0}^n \frac{k!x}{(\ln x)^{k+1}} + o_{x \rightarrow +\infty}(\frac{x}{(\ln x)^{n+1}})$  .....  0  1

1)  $\arctan \in E_1$  car s'annule en 0 et  $C^1$  .....  0  1

et  $(\frac{\arctan t}{t})^2$  cpm .....  0  1

et  $(\frac{\arctan t}{t})^2$  intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1

et  $(\frac{\arctan t}{t})^2$  intégrable sur  $[1, +\infty[$  .....  0  1

2)  $H_u : t \mapsto \frac{1}{(t^2+1)(t^2+u)}$  intégrable sur  $[0, \infty[$  car continue sur  $[0, \infty[$  .....  0  1

et  $\sim_\infty 1/t^4$  donc intégrable sur  $[1, \infty[$  .....  0  1

$f' = \frac{1}{1+t^2}$  donc (avec  $u=1$ )  $f \in E_2$  .....  0  1

3)a)  $\varphi(u) \rightarrow \varphi(1)$  en  $1^+$  car  $t \mapsto H_u(t)$  cpm sur  $[0, \infty[$  .....  0  1

et  $H_u(t) \rightarrow H_1(t)$  .....  0  1

majoration indépendante de  $u$  par  $H_1(t)$  ou  $\frac{1}{1+t^2}$  .....  0  1

penser aux valeurs absolues (ou fonction positive) .....  0  1

intégrabilité du majorant .....  0  1

3)b)  $\frac{1}{(T+1)(T+u^2)} = \frac{1}{u^2-1} (\frac{1}{T+1} - \frac{1}{T+u^2})$  .....  0  1

3)c)  $\varphi(x) = \frac{\pi}{2x(x+1)}$  pour  $x \neq 1$  bien simplifiée .....  0  1

pas simplifiée .....  0  1

3)d)  $N_2(f)^2 = \lim_{1+} \varphi$ , citer 3.a .....  0  1

$N_2(f) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$  .....  0  1

4)  $G_x : t \mapsto \frac{\arctan(xt)}{t(t^2+1)}$  intégrable sur  $]0, \infty[$  car cpm .....  0  1

et  $\sim_0 x$  donc intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1

et  $O_\infty(1/t^3)$  sur  $[1, +\infty[$  .....  0  1

équivalent en  $\infty$  faux quand  $x=0$  .....  0  1

5)a)  $x \neq 0$  ;  $\theta'(x) = \frac{1}{x^2} \varphi(\frac{1}{x})$  ou  $x\varphi(x)$  .....  0  1

$\theta'(x) = \frac{\pi}{2(x+1)}$  .....  0  1

$\theta'(0) = \frac{\pi}{2}$  .....  0  1

5)b) TFA .....  0  1

$\theta(x) = \frac{\pi}{2} \ln(1+x) + C$  .....  0  1

$C=0$  .....  0  1

5)c)  $N_1^2(f) = 2\theta(1)$  par IPP .....  0  1  2  3

5)d)  $N_1(f) = \sqrt{\pi \ln(2)}$  .....  0  1

$\frac{N_1(f)}{N_2(f)} = 2\sqrt{\ln(2)}$  .....  0  1

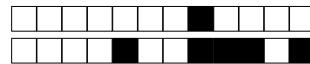
6)  $f'(t) = \frac{1+\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}}{t+\sqrt{t^2+1}}$  .....  0  1

$f'(t) = 1/(\sqrt{t^2+1})$  .....  0  1

$f \in E_1$  car  $f \in C^1([0, +\infty[)$  .....  0  1

et car  $f(0)=0$  .....  0  1

et car  $\int f'^2$  cv,  $N_2(f) = \sqrt{\pi/2}$  .....  0  1



- 7)  $f(t) \sim_0 t$  .....  0  1  
 $f(t) \sim_\infty \ln t$  .....  0  1  2

- 8)  $f \in E_1$  car  $t \mapsto (\frac{f(t)}{t})^2 \sim_0 1$  intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1  
et  $\sim_\infty \frac{\ln^2 t}{t^2}$  intégrable sur  $[1, +\infty[$  .....  0  1

- 9)a)  $-\ln t/(1-t^2)$  intégrable sur  $]0, 1[$  car cpm .....  0  1  
et  $\sim_0 -\ln t = 0(1/\sqrt{t})$  intégrable sur  $]0, \frac{1}{2}]$  .....  0  1  
et  $\sim_1 -(t-1)/(1-t^2) = 1/(t+1) \sim_1 1/2$  intégrable sur  $[\frac{1}{2}, 1[$  .....  0  1

- 9)b)  $-t^{2k} \ln t$  intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1  
 $\int = \frac{1}{(2k+1)^2}$  .....  0  1  2

- 9)c)  $J = \sum_0^\infty \int$  car  $\sum \int |.|$  converge .....  0  1  
et  $\sum -t^{2k} \ln t = -\frac{\ln t}{1-t^2}$  .....  0  1  
rappel des autres hypothèses .....  0  1

- 9)d)  $J = \pi^2/8$  .....  0  1  
justification .....  0  1

- 10)a)  $I = 2 \int \frac{f(t)}{t\sqrt{t^2+1}}$  .....  0  1  2

- 10)b)  $f$  bijective de  $\mathbb{R}_+^*$  dans  $\mathbb{R}_+^*$  ;  $f^{-1} = \text{sh}$  .....  0  1  2  3

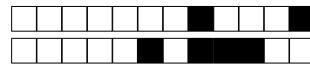
- 10)c) Justification cdv .....  0  1  
 $I = 2 \int \frac{u}{\text{sh} u}$  .....  0  1

- 10)d)  $I = 4J$  .....  0  1  
 $N_1(f) = \pi/\sqrt{2}$  .....  0  1  
 $\frac{N_1(f)}{N_2(f)} = \sqrt{\pi}$  .....  0  1
- 

- 11)a)  $h \rightarrow_0 \alpha$  .....  0  1  
 $g \rightarrow_0 0$  .....  0  1

- 11)b)  $f'(t) - \sqrt{t}g'(t) = h(t)/2$  .....  0  1  
11)c)  $\sqrt{t}g'(t) \rightarrow_0 \alpha/2$  .....  0  1

- $gg' \rightarrow_0 \alpha^2/2$  .....  0  1  
11)d)  $\int (f')^2 = g^2/2 + \int (\sqrt{t}g')^2 + \frac{1}{4} \int h^2$  .....  0  1  2  
justification des intégrabilités .....  0  1  
12)a)  $E_2 \subset E_1$  .....  0  1  2  
13)b)  $\sin \in E_1$  .....  0  1  2  
 $\sin \notin E_2$  .....  0  1  2  3  
..... .....  0  1  
..... .....  0  1  
..... .....  0  1



Nom :	
-------	--

## DS 2

Soin) .....  0  1  2  3

1)a) IPP :  $\int_2^x \frac{1}{\ln t} dt = \frac{x}{\ln x} + c_0 + \int_2^x g_0$  ;  $c_0 = -\frac{2}{\ln 2}$  ;  $g_0(t) = \frac{1}{(\ln t)^2}$   0  1  2

1)b)  $R_0 = o_\infty(\int_2^x \frac{1}{\ln t} dt)$  car  $\int_2^x \frac{1}{\ln t} dt$  diverge .....  0  1

et  $\frac{1}{(\ln t)^2} = o(\frac{1}{\ln t})$  .....  0  1

et  $1/\ln$  positive .....  0  1

1)c)  $R_0 \sim_\infty \frac{x}{\ln x}$  .....  0  1

car  $\int \frac{1}{\ln t} - R_0 \sim \int \frac{1}{\ln t}$  .....  0  1

et  $c_0 = o(\frac{x}{\ln x})$  .....  0  1

2)a)  $c_n = -2 \sum_0^n \frac{k!}{(\ln 2)^{k+1}}$  et  $g_n(t) = \frac{(n+1)!}{(\ln t)^{n+2}}$  .....  0  1  2  3

2)b))  $R_{n+1} = o(R_n)$  car  $1/\ln^{n+2} \geq 0$  et  $1/\ln^{n+3} = o_\infty(1/\ln^{n+2})$  .....  0  1

et car  $1/\ln^{n+2}$  non intégrable en  $\infty$  .....  0  1

2)c)  $R_n \sim (n+1)! \frac{x}{(\ln x)^{n+2}}$  .....  0  1  2

2)d)  $\int_2^x \frac{1}{\ln t} = \sum_{k=0}^n \frac{k!x}{(\ln x)^{k+1}} + o_{x \rightarrow +\infty}(\frac{x}{(\ln x)^{n+1}})$  .....  0  1

1)  $\arctan \in E_1$  car s'annule en 0 et  $C^1$  .....  0  1

et  $(\frac{\arctan t}{t})^2$  cpm .....  0  1

et  $(\frac{\arctan t}{t})^2$  intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1

et  $(\frac{\arctan t}{t})^2$  intégrable sur  $[1, +\infty[$  .....  0  1

2)  $H_u : t \mapsto \frac{1}{(t^2+1)(t^2+u)}$  intégrable sur  $[0, \infty[$  car continue sur  $[0, \infty[$  .....  0  1

et  $\sim_\infty 1/t^4$  donc intégrable sur  $[1, \infty[$  .....  0  1

$f' = \frac{1}{1+t^2}$  donc (avec  $u=1$ )  $f \in E_2$  .....  0  1

3)a)  $\varphi(u) \rightarrow \varphi(1)$  en  $1^+$  car  $t \mapsto H_u(t)$  cpm sur  $[0, \infty[$  .....  0  1

et  $H_u(t) \rightarrow H_1(t)$  .....  0  1

majoration indépendante de  $u$  par  $H_1(t)$  ou  $\frac{1}{1+t^2}$  .....  0  1

penser aux valeurs absolues (ou fonction positive) .....  0  1

intégrabilité du majorant .....  0  1

3)b)  $\frac{1}{(T+1)(T+u^2)} = \frac{1}{u^2-1} (\frac{1}{T+1} - \frac{1}{T+u^2})$  .....  0  1

3)c)  $\varphi(x) = \frac{\pi}{2x(x+1)}$  pour  $x \neq 1$  bien simplifiée .....  0  1

pas simplifiée .....  0  1

3)d)  $N_2(f)^2 = \lim_{1+} \varphi$ , citer 3.a .....  0  1

$N_2(f) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$  .....  0  1

4)  $G_x : t \mapsto \frac{\arctan(xt)}{t(t^2+1)}$  intégrable sur  $]0, \infty[$  car cpm .....  0  1

et  $\sim_0 x$  donc intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1

et  $O_\infty(1/t^3)$  sur  $[1, +\infty[$  .....  0  1

équivalent en  $\infty$  faux quand  $x=0$  .....  0  1

5)a)  $x \neq 0$  ;  $\theta'(x) = \frac{1}{x^2} \varphi(\frac{1}{x})$  ou  $x\varphi(x)$  .....  0  1

$\theta'(x) = \frac{\pi}{2(x+1)}$  .....  0  1

$\theta'(0) = \frac{\pi}{2}$  .....  0  1

5)b) TFA .....  0  1

$\theta(x) = \frac{\pi}{2} \ln(1+x) + C$  .....  0  1

$C = 0$  .....  0  1

5)c)  $N_1^2(f) = 2\theta(1)$  par IPP .....  0  1  2  3

5)d)  $N_1(f) = \sqrt{\pi \ln(2)}$  .....  0  1

$\frac{N_1(f)}{N_2(f)} = 2\sqrt{\ln(2)}$  .....  0  1

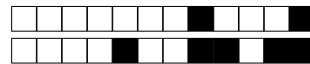
6)  $f'(t) = \frac{1+\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}}{t+\sqrt{t^2+1}}$  .....  0  1

$f'(t) = 1/(\sqrt{t^2+1})$  .....  0  1

$f \in E_1$  car  $f \in C^1([0, +\infty[)$  .....  0  1

et car  $f(0)=0$  .....  0  1

et car  $\int f'^2$  cv,  $N_2(f) = \sqrt{\pi/2}$  .....  0  1



- 7)  $f(t) \sim_0 t$  .....  0  1  
 $f(t) \sim_\infty \ln t$  .....  0  1  2

- 8)  $f \in E_1$  car  $t \mapsto (\frac{f(t)}{t})^2 \sim_0 1$  intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1  
et  $\sim_\infty \frac{\ln^2 t}{t^2}$  intégrable sur  $[1, +\infty[$  .....  0  1

- 9)a)  $-\ln t/(1-t^2)$  intégrable sur  $]0, 1[$  car cpm .....  0  1  
et  $\sim_0 -\ln t = 0(1/\sqrt{t})$  intégrable sur  $]0, \frac{1}{2}]$  .....  0  1  
et  $\sim_1 -(t-1)/(1-t^2) = 1/(t+1) \sim_1 1/2$  intégrable sur  $[\frac{1}{2}, 1[$  .....  0  1

- 9)b)  $-t^{2k} \ln t$  intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1  
 $\int = \frac{1}{(2k+1)^2}$  .....  0  1  2

- 9)c)  $J = \sum_0^\infty \int$  car  $\sum \int |.|$  converge .....  0  1  
et  $\sum -t^{2k} \ln t = -\frac{\ln t}{1-t^2}$  .....  0  1  
rappel des autres hypothèses .....  0  1

- 9)d)  $J = \pi^2/8$  .....  0  1  
justification .....  0  1

- 10)a)  $I = 2 \int \frac{f(t)}{t\sqrt{t^2+1}}$  .....  0  1  2

- 10)b)  $f$  bijective de  $\mathbb{R}_+^*$  dans  $\mathbb{R}_+^*$  ;  $f^{-1} = \text{sh}$  .....  0  1  2  3

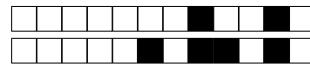
- 10)c) Justification cdv .....  0  1  
 $I = 2 \int \frac{u}{\text{sh} u}$  .....  0  1

- 10)d)  $I = 4J$  .....  0  1  
 $N_1(f) = \pi/\sqrt{2}$  .....  0  1  
 $\frac{N_1(f)}{N_2(f)} = \sqrt{\pi}$  .....  0  1
- 

- 11)a)  $h \rightarrow_0 \alpha$  .....  0  1  
 $g \rightarrow_0 0$  .....  0  1

- 11)b)  $f'(t) - \sqrt{t}g'(t) = h(t)/2$  .....  0  1  
11)c)  $\sqrt{t}g'(t) \rightarrow_0 \alpha/2$  .....  0  1

- $gg' \rightarrow_0 \alpha^2/2$  .....  0  1  
11)d)  $\int (f')^2 = g^2/2 + \int (\sqrt{t}g')^2 + \frac{1}{4} \int h^2$  .....  0  1  2  
justification des intégrabilités .....  0  1  
12)a)  $E_2 \subset E_1$  .....  0  1  2  
13)b)  $\sin \in E_1$  .....  0  1  2  
 $\sin \notin E_2$  .....  0  1  2  3  
..... .....  0  1  
..... .....  0  1  
..... .....  0  1



Nom : \_\_\_\_\_

## DS 2

Soin) .....  0  1  2  3

1)a) IPP :  $\int_2^x \frac{1}{\ln t} dt = \frac{x}{\ln x} + c_0 + \int_2^x g_0$  ;  $c_0 = -\frac{2}{\ln 2}$  ;  $g_0(t) = \frac{1}{(\ln t)^2}$   0  1  2

1)b)  $R_0 = o_\infty(\int_2^x \frac{1}{\ln t} dt)$  car  $\int_2^x \frac{1}{\ln t} dt$  diverge .....  0  1

et  $\frac{1}{(\ln t)^2} = o(\frac{1}{\ln t})$  .....  0  1

et  $1/\ln$  positive .....  0  1

1)c)  $R_0 \sim_\infty \frac{x}{\ln x}$  .....  0  1

car  $\int \frac{1}{\ln t} - R_0 \sim \int \frac{1}{\ln t}$  .....  0  1

et  $c_0 = o(\frac{x}{\ln x})$  .....  0  1

2)a)  $c_n = -2 \sum_0^n \frac{k!}{(\ln 2)^{k+1}}$  et  $g_n(t) = \frac{(n+1)!}{(\ln t)^{n+2}}$  .....  0  1  2  3

2)b))  $R_{n+1} = o(R_n)$  car  $1/\ln^{n+2} \geq 0$  et  $1/\ln^{n+3} = o_\infty(1/\ln^{n+2})$  .....  0  1

et car  $1/\ln^{n+2}$  non intégrable en  $\infty$  .....  0  1

2)c)  $R_n \sim (n+1)! \frac{x}{(\ln x)^{n+2}}$  .....  0  1  2

2)d)  $\int_2^x \frac{1}{\ln t} = \sum_{k=0}^n \frac{k!x}{(\ln x)^{k+1}} + o_{x \rightarrow +\infty}(\frac{x}{(\ln x)^{n+1}})$  .....  0  1

1)  $\arctan \in E_1$  car s'annule en 0 et  $C^1$  .....  0  1

et  $(\frac{\arctan t}{t})^2$  cpm .....  0  1

et  $(\frac{\arctan t}{t})^2$  intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1

et  $(\frac{\arctan t}{t})^2$  intégrable sur  $[1, +\infty[$  .....  0  1

2)  $H_u : t \mapsto \frac{1}{(t^2+1)(t^2+u)}$  intégrable sur  $[0, \infty[$  car continue sur  $[0, \infty[$  .....  0  1

et  $\sim_\infty 1/t^4$  donc intégrable sur  $[1, \infty[$  .....  0  1

$f' = \frac{1}{1+t^2}$  donc (avec  $u=1$ )  $f \in E_2$  .....  0  1

3)a)  $\varphi(u) \rightarrow \varphi(1)$  en  $1^+$  car  $t \mapsto H_u(t)$  cpm sur  $[0, \infty[$  .....  0  1

et  $H_u(t) \rightarrow H_1(t)$  .....  0  1

majoration indépendante de  $u$  par  $H_1(t)$  ou  $\frac{1}{1+t^2}$  .....  0  1

penser aux valeurs absolues (ou fonction positive) .....  0  1

intégrabilité du majorant .....  0  1

3)b)  $\frac{1}{(T+1)(T+u^2)} = \frac{1}{u^2-1} (\frac{1}{T+1} - \frac{1}{T+u^2})$  .....  0  1

3)c)  $\varphi(x) = \frac{\pi}{2x(x+1)}$  pour  $x \neq 1$  bien simplifiée .....  0  1

pas simplifiée .....  0  1

3)d)  $N_2(f)^2 = \lim_{1+} \varphi$ , citer 3.a .....  0  1

$N_2(f) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$  .....  0  1

4)  $G_x : t \mapsto \frac{\arctan(xt)}{t(t^2+1)}$  intégrable sur  $]0, \infty[$  car cpm .....  0  1

et  $\sim_0 x$  donc intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1

et  $O_\infty(1/t^3)$  sur  $[1, +\infty[$  .....  0  1

équivalent en  $\infty$  faux quand  $x=0$  .....  0  1

5)a)  $x \neq 0$  ;  $\theta'(x) = \frac{1}{x^2} \varphi(\frac{1}{x})$  ou  $x\varphi(x)$  .....  0  1

$\theta'(x) = \frac{\pi}{2(x+1)}$  .....  0  1

$\theta'(0) = \frac{\pi}{2}$  .....  0  1

5)b) TFA .....  0  1

$\theta(x) = \frac{\pi}{2} \ln(1+x) + C$  .....  0  1

$C=0$  .....  0  1

5)c)  $N_1^2(f) = 2\theta(1)$  par IPP .....  0  1  2  3

5)d)  $N_1(f) = \sqrt{\pi \ln(2)}$  .....  0  1

$\frac{N_1(f)}{N_2(f)} = 2\sqrt{\ln(2)}$  .....  0  1

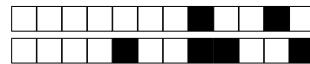
6)  $f'(t) = \frac{1+\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}}{t+\sqrt{t^2+1}}$  .....  0  1

$f'(t) = 1/(\sqrt{t^2+1})$  .....  0  1

$f \in E_1$  car  $f \in C^1([0, +\infty[)$  .....  0  1

et car  $f(0)=0$  .....  0  1

et car  $\int f'^2$  cv,  $N_2(f) = \sqrt{\pi/2}$  .....  0  1



- 7)  $f(t) \sim_0 t$  .....  0  1  
 $f(t) \sim_\infty \ln t$  .....  0  1  2

8)  $f \in E_1$  car  $t \mapsto (\frac{f(t)}{t})^2 \sim_0 1$  intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1  
et  $\sim_\infty \frac{\ln^2 t}{t^2}$  intégrable sur  $[1, +\infty[$  .....  0  1

9)a)  $-\ln t/(1-t^2)$  intégrable sur  $]0, 1[$  car cpm .....  0  1  
et  $\sim_0 -\ln t = 0(1/\sqrt{t})$  intégrable sur  $]0, \frac{1}{2}]$  .....  0  1  
et  $\sim_1 -(t-1)/(1-t^2) = 1/(t+1) \sim_1 1/2$  intégrable sur  $[\frac{1}{2}, 1[$  .....  0  1

9)b)  $-t^{2k} \ln t$  intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1  
 $\int = \frac{1}{(2k+1)^2}$  .....  0  1  2

9)c)  $J = \sum_0^\infty \int$  car  $\sum \int |.|$  converge .....  0  1  
et  $\sum -t^{2k} \ln t = -\frac{\ln t}{1-t^2}$  .....  0  1  
rappel des autres hypothèses .....  0  1

9)d)  $J = \pi^2/8$  .....  0  1  
justification .....  0  1

10)a)  $I = 2 \int \frac{f(t)}{t\sqrt{t^2+1}}$  .....  0  1  2

10)b)  $f$  bijective de  $\mathbb{R}_+^*$  dans  $\mathbb{R}_+^*$  ;  $f^{-1} = \text{sh}$  .....  0  1  2  3

10)c) Justification cdv .....  0  1  
 $I = 2 \int \frac{u}{\text{sh} u}$  .....  0  1

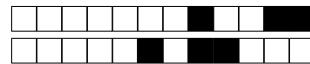
10)d)  $I = 4J$  .....  0  1  
 $N_1(f) = \pi/\sqrt{2}$  .....  0  1  
 $\frac{N_1(f)}{N_2(f)} = \sqrt{\pi}$  .....  0  1

---

11)a)  $h \rightarrow_0 \alpha$  .....  0  1  
 $g \rightarrow_0 0$  .....  0  1

11)b)  $f'(t) - \sqrt{t}g'(t) = h(t)/2$  .....  0  1  
11)c)  $\sqrt{t}g'(t) \rightarrow_0 \alpha/2$  .....  0  1

- $gg' \rightarrow_0 \alpha^2/2$  .....  0  1  
11)d)  $\int (f')^2 = g^2/2 + \int (\sqrt{t}g')^2 + \frac{1}{4} \int h^2$  .....  0  1  2  
justification des intégrabilités .....  0  1  
12)a)  $E_2 \subset E_1$  .....  0  1  2  
13)b)  $\sin \in E_1$  .....  0  1  2  
 $\sin \notin E_2$  .....  0  1  2  3  
..... .....  0  1  
..... .....  0  1  
..... .....  0  1



Nom : \_\_\_\_\_

## DS 2

Soin) .....  0  1  2  3

1)a) IPP :  $\int_2^x \frac{1}{\ln t} dt = \frac{x}{\ln x} + c_0 + \int_2^x g_0$  ;  $c_0 = -\frac{2}{\ln 2}$  ;  $g_0(t) = \frac{1}{(\ln t)^2}$   0  1  2

1)b)  $R_0 = o_\infty(\int_2^x \frac{1}{\ln t} dt)$  car  $\int_2^x \frac{1}{\ln t} dt$  diverge .....  0  1

et  $\frac{1}{(\ln t)^2} = o(\frac{1}{\ln t})$  .....  0  1

et  $1/\ln$  positive .....  0  1

1)c)  $R_0 \sim_\infty \frac{x}{\ln x}$  .....  0  1

car  $\int \frac{1}{\ln t} - R_0 \sim \int \frac{1}{\ln t}$  .....  0  1

et  $c_0 = o(\frac{x}{\ln x})$  .....  0  1

2)a)  $c_n = -2 \sum_0^n \frac{k!}{(\ln 2)^{k+1}}$  et  $g_n(t) = \frac{(n+1)!}{(\ln t)^{n+2}}$  .....  0  1  2  3

2)b))  $R_{n+1} = o(R_n)$  car  $1/\ln^{n+2} \geq 0$  et  $1/\ln^{n+3} = o_\infty(1/\ln^{n+2})$  .....  0  1

et car  $1/\ln^{n+2}$  non intégrable en  $\infty$  .....  0  1

2)c)  $R_n \sim (n+1)! \frac{x}{(\ln x)^{n+2}}$  .....  0  1  2

2)d)  $\int_2^x \frac{1}{\ln t} = \sum_{k=0}^n \frac{k!x}{(\ln x)^{k+1}} + o_{x \rightarrow +\infty}(\frac{x}{(\ln x)^{n+1}})$  .....  0  1

1)  $\arctan \in E_1$  car s'annule en 0 et  $C^1$  .....  0  1

et  $(\frac{\arctan t}{t})^2$  cpm .....  0  1

et  $(\frac{\arctan t}{t})^2$  intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1

et  $(\frac{\arctan t}{t})^2$  intégrable sur  $[1, +\infty[$  .....  0  1

2)  $H_u : t \mapsto \frac{1}{(t^2+1)(t^2+u)}$  intégrable sur  $[0, \infty[$  car continue sur  $[0, \infty[$  .....  0  1

et  $\sim_\infty 1/t^4$  donc intégrable sur  $[1, \infty[$  .....  0  1

$f' = \frac{1}{1+t^2}$  donc (avec  $u = 1$ )  $f \in E_2$  .....  0  1

3)a)  $\varphi(u) \rightarrow \varphi(1)$  en  $1^+$  car  $t \mapsto H_u(t)$  cpm sur  $[0, \infty[$  .....  0  1

et  $H_u(t) \rightarrow H_1(t)$  .....  0  1

majoration indépendante de  $u$  par  $H_1(t)$  ou  $\frac{1}{1+t^2}$  .....  0  1

penser aux valeurs absolues (ou fonction positive) .....  0  1

intégrabilité du majorant .....  0  1

3)b)  $\frac{1}{(T+1)(T+u^2)} = \frac{1}{u^2-1} (\frac{1}{T+1} - \frac{1}{T+u^2})$  .....  0  1

3)c)  $\varphi(x) = \frac{\pi}{2x(x+1)}$  pour  $x \neq 1$  bien simplifiée .....  0  1

pas simplifiée .....  0  1

3)d)  $N_2(f)^2 = \lim_{1+} \varphi$ , citer 3.a .....  0  1

$N_2(f) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$  .....  0  1

4)  $G_x : t \mapsto \frac{\arctan(xt)}{t(t^2+1)}$  intégrable sur  $]0, \infty[$  car cpm .....  0  1

et  $\sim_0 x$  donc intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1

et  $O_\infty(1/t^3)$  sur  $[1, +\infty[$  .....  0  1

équivalent en  $\infty$  faux quand  $x = 0$  .....  0  1

5)a)  $x \neq 0$  ;  $\theta'(x) = \frac{1}{x^2} \varphi(\frac{1}{x})$  ou  $x\varphi(x)$  .....  0  1

$\theta'(x) = \frac{\pi}{2(x+1)}$  .....  0  1

$\theta'(0) = \frac{\pi}{2}$  .....  0  1

5)b) TFA .....  0  1

$\theta(x) = \frac{\pi}{2} \ln(1+x) + C$  .....  0  1

$C = 0$  .....  0  1

5)c)  $N_1^2(f) = 2\theta(1)$  par IPP .....  0  1  2  3

5)d)  $N_1(f) = \sqrt{\pi \ln(2)}$  .....  0  1

$\frac{N_1(f)}{N_2(f)} = 2\sqrt{\ln(2)}$  .....  0  1

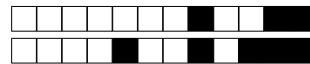
6)  $f'(t) = \frac{1+\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}}{t+\sqrt{t^2+1}}$  .....  0  1

$f'(t) = 1/(\sqrt{t^2+1})$  .....  0  1

$f \in E_1$  car  $f \in C^1([0, +\infty[)$  .....  0  1

et car  $f(0) = 0$  .....  0  1

et car  $\int f'^2$  cv,  $N_2(f) = \sqrt{\pi/2}$  .....  0  1



- 7)  $f(t) \sim_0 t$  .....  0  1  
 $f(t) \sim_\infty \ln t$  .....  0  1  2

- 8)  $f \in E_1$  car  $t \mapsto (\frac{f(t)}{t})^2 \sim_0 1$  intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1  
et  $\sim_\infty \frac{\ln^2 t}{t^2}$  intégrable sur  $[1, +\infty[$  .....  0  1

- 9)a)  $-\ln t/(1-t^2)$  intégrable sur  $]0, 1[$  car cpm .....  0  1  
et  $\sim_0 -\ln t = 0(1/\sqrt{t})$  intégrable sur  $]0, \frac{1}{2}]$  .....  0  1  
et  $\sim_1 -(t-1)/(1-t^2) = 1/(t+1) \sim_1 1/2$  intégrable sur  $[\frac{1}{2}, 1[$  .....  0  1

- 9)b)  $-t^{2k} \ln t$  intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1  
 $\int = \frac{1}{(2k+1)^2}$  .....  0  1  2

- 9)c)  $J = \sum_0^\infty \int$  car  $\sum \int |.|$  converge .....  0  1  
et  $\sum -t^{2k} \ln t = -\frac{\ln t}{1-t^2}$  .....  0  1  
rappel des autres hypothèses .....  0  1

- 9)d)  $J = \pi^2/8$  .....  0  1  
justification .....  0  1

- 10)a)  $I = 2 \int \frac{f(t)}{t\sqrt{t^2+1}}$  .....  0  1  2

- 10)b)  $f$  bijective de  $\mathbb{R}_+^*$  dans  $\mathbb{R}_+^*$  ;  $f^{-1} = \text{sh}$  .....  0  1  2  3

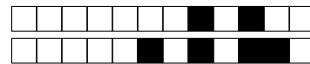
- 10)c) Justification cdv .....  0  1  
 $I = 2 \int \frac{u}{\text{sh} u}$  .....  0  1

- 10)d)  $I = 4J$  .....  0  1  
 $N_1(f) = \pi/\sqrt{2}$  .....  0  1  
 $\frac{N_1(f)}{N_2(f)} = \sqrt{\pi}$  .....  0  1
- 

- 11)a)  $h \rightarrow_0 \alpha$  .....  0  1  
 $g \rightarrow_0 0$  .....  0  1

- 11)b)  $f'(t) - \sqrt{t}g'(t) = h(t)/2$  .....  0  1  
11)c)  $\sqrt{t}g'(t) \rightarrow_0 \alpha/2$  .....  0  1

- $gg' \rightarrow_0 \alpha^2/2$  .....  0  1  
11)d)  $\int (f')^2 = g^2/2 + \int (\sqrt{t}g')^2 + \frac{1}{4} \int h^2$  .....  0  1  2  
justification des intégrabilités .....  0  1  
12)a)  $E_2 \subset E_1$  .....  0  1  2  
13)b)  $\sin \in E_1$  .....  0  1  2  
 $\sin \notin E_2$  .....  0  1  2  3  
..... .....  0  1  
..... .....  0  1  
..... .....  0  1



Nom : \_\_\_\_\_

## DS 2

Soin) .....  0  1  2  3

1)a) IPP :  $\int_2^x \frac{1}{\ln t} dt = \frac{x}{\ln x} + c_0 + \int_2^x g_0 ; c_0 = -\frac{2}{\ln 2} ; g_0(t) = \frac{1}{(\ln t)^2}$   0  1  2

1)b)  $R_0 = o_\infty(\int_2^x \frac{1}{\ln t} dt)$  car  $\int_2^x \frac{1}{\ln t} dt$  diverge .....  0  1

et  $\frac{1}{(\ln t)^2} = o(\frac{1}{\ln t})$  .....  0  1

et  $1/\ln$  positive .....  0  1

1)c)  $R_0 \sim_\infty \frac{x}{\ln x}$  .....  0  1

car  $\int \frac{1}{\ln t} - R_0 \sim \int \frac{1}{\ln t}$  .....  0  1

et  $c_0 = o(\frac{x}{\ln x})$  .....  0  1

2)a)  $c_n = -2 \sum_0^n \frac{k!}{(\ln 2)^{k+1}}$  et  $g_n(t) = \frac{(n+1)!}{(\ln t)^{n+2}}$  .....  0  1  2  3

2)b))  $R_{n+1} = o(R_n)$  car  $1/\ln^{n+2} \geq 0$  et  $1/\ln^{n+3} = o_\infty(1/\ln^{n+2})$  .....  0  1

et car  $1/\ln^{n+2}$  non intégrable en  $\infty$  .....  0  1

2)c)  $R_n \sim (n+1)! \frac{x}{(\ln x)^{n+2}}$  .....  0  1  2

2)d)  $\int_2^x \frac{1}{\ln t} = \sum_{k=0}^n \frac{k!x}{(\ln x)^{k+1}} + o_{x \rightarrow +\infty}(\frac{x}{(\ln x)^{n+1}})$  .....  0  1

1)  $\arctan \in E_1$  car s'annule en 0 et  $C^1$  .....  0  1

et  $(\frac{\arctan t}{t})^2$  cpm .....  0  1

et  $(\frac{\arctan t}{t})^2$  intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1

et  $(\frac{\arctan t}{t})^2$  intégrable sur  $[1, +\infty[$  .....  0  1

2)  $H_u : t \mapsto \frac{1}{(t^2+1)(t^2+u)}$  intégrable sur  $[0, \infty[$  car continue sur  $[0, \infty[$  .....  0  1

et  $\sim_\infty 1/t^4$  donc intégrable sur  $[1, \infty[$  .....  0  1

$f' = \frac{1}{1+t^2}$  donc (avec  $u=1$ )  $f \in E_2$  .....  0  1

3)a)  $\varphi(u) \rightarrow \varphi(1)$  en  $1^+$  car  $t \mapsto H_u(t)$  cpm sur  $[0, \infty[$  .....  0  1

et  $H_u(t) \rightarrow H_1(t)$  .....  0  1

majoration indépendante de  $u$  par  $H_1(t)$  ou  $\frac{1}{1+t^2}$  .....  0  1

penser aux valeurs absolues (ou fonction positive) .....  0  1

intégrabilité du majorant .....  0  1

3)b)  $\frac{1}{(T+1)(T+u^2)} = \frac{1}{u^2-1} (\frac{1}{T+1} - \frac{1}{T+u^2})$  .....  0  1

3)c)  $\varphi(x) = \frac{\pi}{2x(x+1)}$  pour  $x \neq 1$  bien simplifiée .....  0  1

pas simplifiée .....  0  1

3)d)  $N_2(f)^2 = \lim_{1+} \varphi$ , citer 3.a .....  0  1

$N_2(f) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$  .....  0  1

4)  $G_x : t \mapsto \frac{\arctan(xt)}{t(t^2+1)}$  intégrable sur  $]0, \infty[$  car cpm .....  0  1

et  $\sim_0 x$  donc intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1

et  $O_\infty(1/t^3)$  sur  $[1, +\infty[$  .....  0  1

équivalent en  $\infty$  faux quand  $x=0$  .....  0  1

5)a)  $x \neq 0 ; \theta'(x) = \frac{1}{x^2} \varphi(\frac{1}{x})$  ou  $x\varphi(x)$  .....  0  1

$\theta'(x) = \frac{\pi}{2(x+1)}$  .....  0  1

$\theta'(0) = \frac{\pi}{2}$  .....  0  1

5)b) TFA .....  0  1

$\theta(x) = \frac{\pi}{2} \ln(1+x) + C$  .....  0  1

$C=0$  .....  0  1

5)c)  $N_1^2(f) = 2\theta(1)$  par IPP .....  0  1  2  3

5)d)  $N_1(f) = \sqrt{\pi \ln(2)}$  .....  0  1

$\frac{N_1(f)}{N_2(f)} = 2\sqrt{\ln(2)}$  .....  0  1

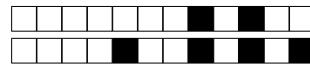
6)  $f'(t) = \frac{1+\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}}{t+\sqrt{t^2+1}}$  .....  0  1

$f'(t) = 1/(\sqrt{t^2+1})$  .....  0  1

$f \in E_1$  car  $f \in C^1([0, +\infty[)$  .....  0  1

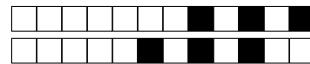
et car  $f(0)=0$  .....  0  1

et car  $\int f'^2$  cv,  $N_2(f) = \sqrt{\pi/2}$  .....  0  1



- 7)  $f(t) \sim_0 t$  .....  0  1  
 $f(t) \sim_\infty \ln t$  .....  0  1  2
- 8)  $f \in E_1$  car  $t \mapsto (\frac{f(t)}{t})^2 \sim_0 1$  intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1  
et  $\sim_\infty \frac{\ln^2 t}{t^2}$  intégrable sur  $[1, +\infty[$  .....  0  1
- 9)a)  $-\ln t/(1-t^2)$  intégrable sur  $]0, 1[$  car cpm .....  0  1  
et  $\sim_0 -\ln t = 0(1/\sqrt{t})$  intégrable sur  $]0, \frac{1}{2}]$  .....  0  1  
et  $\sim_1 -(t-1)/(1-t^2) = 1/(t+1) \sim_1 1/2$  intégrable sur  $[\frac{1}{2}, 1[$  .....  0  1
- 9)b)  $-t^{2k} \ln t$  intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1  
 $\int = \frac{1}{(2k+1)^2}$  .....  0  1  2
- 9)c)  $J = \sum_0^\infty \int$  car  $\sum \int |.|$  converge .....  0  1  
et  $\sum -t^{2k} \ln t = -\frac{\ln t}{1-t^2}$  .....  0  1  
rappel des autres hypothèses .....  0  1
- 9)d)  $J = \pi^2/8$  .....  0  1  
justification .....  0  1
- 10)a)  $I = 2 \int \frac{f(t)}{t\sqrt{t^2+1}}$  .....  0  1  2
- 10)b)  $f$  bijective de  $\mathbb{R}_+^*$  dans  $\mathbb{R}_+^*$  ;  $f^{-1} = \text{sh}$  .....  0  1  2  3
- 10)c) Justification cdv .....  0  1  
 $I = 2 \int \frac{u}{\text{sh} u}$  .....  0  1
- 10)d)  $I = 4J$  .....  0  1  
 $N_1(f) = \pi/\sqrt{2}$  .....  0  1  
 $\frac{N_1(f)}{N_2(f)} = \sqrt{\pi}$  .....  0  1
- 
- 11)a)  $h \rightarrow_0 \alpha$  .....  0  1  
 $g \rightarrow_0 0$  .....  0  1
- 11)b)  $f'(t) - \sqrt{t}g'(t) = h(t)/2$  .....  0  1
- 11)c)  $\sqrt{t}g'(t) \rightarrow_0 \alpha/2$  .....  0  1

- $gg' \rightarrow_0 \alpha^2/2$  .....  0  1
- 11)d)  $\int(f')^2 = g^2/2 + \int(\sqrt{t}g')^2 + \frac{1}{4} \int h^2$  .....  0  1  2  
justification des intégrabilités .....  0  1
- 12)a)  $E_2 \subset E_1$  .....  0  1  2
- 13)b)  $\sin \in E_1$  .....  0  1  2  
 $\sin \notin E_2$  .....  0  1  2  3  
..... .....  0  1  
..... .....  0  1  
..... .....  0  1



Nom : \_\_\_\_\_

## DS 2

Soin) .....  0  1  2  3

1)a) IPP :  $\int_2^x \frac{1}{\ln t} dt = \frac{x}{\ln x} + c_0 + \int_2^x g_0$  ;  $c_0 = -\frac{2}{\ln 2}$  ;  $g_0(t) = \frac{1}{(\ln t)^2}$   0  1  2

1)b)  $R_0 = o_\infty(\int_2^x \frac{1}{\ln t} dt)$  car  $\int_2^x \frac{1}{\ln t} dt$  diverge .....  0  1

et  $\frac{1}{(\ln t)^2} = o(\frac{1}{\ln t})$  .....  0  1

et  $1/\ln$  positive .....  0  1

1)c)  $R_0 \sim_\infty \frac{x}{\ln x}$  .....  0  1

car  $\int \frac{1}{\ln t} - R_0 \sim \int \frac{1}{\ln t}$  .....  0  1

et  $c_0 = o(\frac{x}{\ln x})$  .....  0  1

2)a)  $c_n = -2 \sum_{k=0}^n \frac{k!}{(\ln 2)^{k+1}}$  et  $g_n(t) = \frac{(n+1)!}{(\ln t)^{n+2}}$  .....  0  1  2  3

2)b))  $R_{n+1} = o(R_n)$  car  $1/\ln^{n+2} \geq 0$  et  $1/\ln^{n+3} = o_\infty(1/\ln^{n+2})$  .....  0  1

et car  $1/\ln^{n+2}$  non intégrable en  $\infty$  .....  0  1

2)c)  $R_n \sim (n+1)! \frac{x}{(\ln x)^{n+2}}$  .....  0  1  2

2)d)  $\int_2^x \frac{1}{\ln t} = \sum_{k=0}^n \frac{k!x}{(\ln x)^{k+1}} + o_{x \rightarrow +\infty}(\frac{x}{(\ln x)^{n+1}})$  .....  0  1

1)  $\arctan \in E_1$  car s'annule en 0 et  $C^1$  .....  0  1

et  $(\frac{\arctan t}{t})^2$  cpm .....  0  1

et  $(\frac{\arctan t}{t})^2$  intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1

et  $(\frac{\arctan t}{t})^2$  intégrable sur  $[1, +\infty[$  .....  0  1

2)  $H_u : t \mapsto \frac{1}{(t^2+1)(t^2+u)}$  intégrable sur  $[0, \infty[$  car continue sur  $[0, \infty[$  .....  0  1

et  $\sim_\infty 1/t^4$  donc intégrable sur  $[1, \infty[$  .....  0  1

$f' = \frac{1}{1+t^2}$  donc (avec  $u=1$ )  $f \in E_2$  .....  0  1

3)a)  $\varphi(u) \rightarrow \varphi(1)$  en  $1^+$  car  $t \mapsto H_u(t)$  cpm sur  $[0, \infty[$  .....  0  1

et  $H_u(t) \rightarrow H_1(t)$  .....  0  1

majoration indépendante de  $u$  par  $H_1(t)$  ou  $\frac{1}{1+t^2}$  .....  0  1

penser aux valeurs absolues (ou fonction positive) .....  0  1

intégrabilité du majorant .....  0  1

3)b)  $\frac{1}{(T+1)(T+u^2)} = \frac{1}{u^2-1} (\frac{1}{T+1} - \frac{1}{T+u^2})$  .....  0  1

3)c)  $\varphi(x) = \frac{\pi}{2x(x+1)}$  pour  $x \neq 1$  bien simplifiée .....  0  1

pas simplifiée .....  0  1

3)d)  $N_2(f)^2 = \lim_{1+} \varphi$ , citer 3.a .....  0  1

$N_2(f) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$  .....  0  1

4)  $G_x : t \mapsto \frac{\arctan(xt)}{t(t^2+1)}$  intégrable sur  $]0, \infty[$  car cpm .....  0  1

et  $\sim_0 x$  donc intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1

et  $O_\infty(1/t^3)$  sur  $[1, +\infty[$  .....  0  1

équivalent en  $\infty$  faux quand  $x=0$  .....  0  1

5)a)  $x \neq 0$  ;  $\theta'(x) = \frac{1}{x^2} \varphi(\frac{1}{x})$  ou  $x\varphi(x)$  .....  0  1

$\theta'(x) = \frac{\pi}{2(x+1)}$  .....  0  1

$\theta'(0) = \frac{\pi}{2}$  .....  0  1

5)b) TFA .....  0  1

$\theta(x) = \frac{\pi}{2} \ln(1+x) + C$  .....  0  1

$C = 0$  .....  0  1

5)c)  $N_1^2(f) = 2\theta(1)$  par IPP .....  0  1  2  3

5)d)  $N_1(f) = \sqrt{\pi \ln(2)}$  .....  0  1

$\frac{N_1(f)}{N_2(f)} = 2\sqrt{\ln(2)}$  .....  0  1

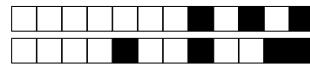
6)  $f'(t) = \frac{1+\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}}{t+\sqrt{t^2+1}}$  .....  0  1

$f'(t) = 1/(\sqrt{t^2+1})$  .....  0  1

$f \in E_1$  car  $f \in C^1([0, +\infty[)$  .....  0  1

et car  $f(0)=0$  .....  0  1

et car  $\int f'^2$  cv,  $N_2(f) = \sqrt{\pi/2}$  .....  0  1



- 7)  $f(t) \sim_0 t$  .....  0  1  
 $f(t) \sim_\infty \ln t$  .....  0  1  2

- 8)  $f \in E_1$  car  $t \mapsto (\frac{f(t)}{t})^2 \sim_0 1$  intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1  
et  $\sim_\infty \frac{\ln^2 t}{t^2}$  intégrable sur  $[1, +\infty[$  .....  0  1

- 9)a)  $-\ln t/(1-t^2)$  intégrable sur  $]0, 1[$  car cpm .....  0  1  
et  $\sim_0 -\ln t = 0(1/\sqrt{t})$  intégrable sur  $]0, \frac{1}{2}]$  .....  0  1  
et  $\sim_1 -(t-1)/(1-t^2) = 1/(t+1) \sim_1 1/2$  intégrable sur  $[\frac{1}{2}, 1[$  .....  0  1

- 9)b)  $-t^{2k} \ln t$  intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1  
 $\int = \frac{1}{(2k+1)^2}$  .....  0  1  2

- 9)c)  $J = \sum_0^\infty \int$  car  $\sum \int |.|$  converge .....  0  1  
et  $\sum -t^{2k} \ln t = -\frac{\ln t}{1-t^2}$  .....  0  1  
rappel des autres hypothèses .....  0  1

- 9)d)  $J = \pi^2/8$  .....  0  1  
justification .....  0  1

- 10)a)  $I = 2 \int \frac{f(t)}{t\sqrt{t^2+1}}$  .....  0  1  2

- 10)b)  $f$  bijective de  $\mathbb{R}_+^*$  dans  $\mathbb{R}_+^*$  ;  $f^{-1} = \text{sh}$  .....  0  1  2  3

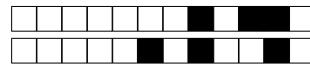
- 10)c) Justification cdv .....  0  1  
 $I = 2 \int \frac{u}{\text{sh} u}$  .....  0  1

- 10)d)  $I = 4J$  .....  0  1  
 $N_1(f) = \pi/\sqrt{2}$  .....  0  1  
 $\frac{N_1(f)}{N_2(f)} = \sqrt{\pi}$  .....  0  1
- 

- 11)a)  $h \rightarrow_0 \alpha$  .....  0  1  
 $g \rightarrow_0 0$  .....  0  1

- 11)b)  $f'(t) - \sqrt{t}g'(t) = h(t)/2$  .....  0  1  
11)c)  $\sqrt{t}g'(t) \rightarrow_0 \alpha/2$  .....  0  1

- $gg' \rightarrow_0 \alpha^2/2$  .....  0  1  
11)d)  $\int (f')^2 = g^2/2 + \int (\sqrt{t}g')^2 + \frac{1}{4} \int h^2$  .....  0  1  2  
justification des intégrabilités .....  0  1  
12)a)  $E_2 \subset E_1$  .....  0  1  2  
13)b)  $\sin \in E_1$  .....  0  1  2  
 $\sin \notin E_2$  .....  0  1  2  3  
..... .....  0  1  
..... .....  0  1  
..... .....  0  1



Nom : \_\_\_\_\_

## DS 2

Soin) .....  0  1  2  3

1)a) IPP :  $\int_2^x \frac{1}{\ln t} dt = \frac{x}{\ln x} + c_0 + \int_2^x g_0 ; c_0 = -\frac{2}{\ln 2} ; g_0(t) = \frac{1}{(\ln t)^2}$   0  1  2

1)b)  $R_0 = o_\infty(\int_2^x \frac{1}{\ln t} dt)$  car  $\int_2^x \frac{1}{\ln t} dt$  diverge .....  0  1

et  $\frac{1}{(\ln t)^2} = o(\frac{1}{\ln t})$  .....  0  1

et  $1/\ln$  positive .....  0  1

1)c)  $R_0 \sim_\infty \frac{x}{\ln x}$  .....  0  1

car  $\int \frac{1}{\ln t} - R_0 \sim \int \frac{1}{\ln t}$  .....  0  1

et  $c_0 = o(\frac{x}{\ln x})$  .....  0  1

2)a)  $c_n = -2 \sum_0^n \frac{k!}{(\ln 2)^{k+1}}$  et  $g_n(t) = \frac{(n+1)!}{(\ln t)^{n+2}}$  .....  0  1  2  3

2)b))  $R_{n+1} = o(R_n)$  car  $1/\ln^{n+2} \geq 0$  et  $1/\ln^{n+3} = o_\infty(1/\ln^{n+2})$  .....  0  1

et car  $1/\ln^{n+2}$  non intégrable en  $\infty$  .....  0  1

2)c)  $R_n \sim (n+1)! \frac{x}{(\ln x)^{n+2}}$  .....  0  1  2

2)d)  $\int_2^x \frac{1}{\ln t} = \sum_{k=0}^n \frac{k!x}{(\ln x)^{k+1}} + o_{x \rightarrow +\infty}(\frac{x}{(\ln x)^{n+1}})$  .....  0  1

1)  $\arctan \in E_1$  car s'annule en 0 et  $C^1$  .....  0  1

et  $(\frac{\arctan t}{t})^2$  cpm .....  0  1

et  $(\frac{\arctan t}{t})^2$  intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1

et  $(\frac{\arctan t}{t})^2$  intégrable sur  $[1, +\infty[$  .....  0  1

2)  $H_u : t \mapsto \frac{1}{(t^2+1)(t^2+u)}$  intégrable sur  $[0, \infty[$  car continue sur  $[0, \infty[$  .....  0  1

et  $\sim_\infty 1/t^4$  donc intégrable sur  $[1, \infty[$  .....  0  1

$f' = \frac{1}{1+t^2}$  donc (avec  $u=1$ )  $f \in E_2$  .....  0  1

3)a)  $\varphi(u) \rightarrow \varphi(1)$  en  $1^+$  car  $t \mapsto H_u(t)$  cpm sur  $[0, \infty[$  .....  0  1

et  $H_u(t) \rightarrow H_1(t)$  .....  0  1

majoration indépendante de  $u$  par  $H_1(t)$  ou  $\frac{1}{1+t^2}$  .....  0  1

penser aux valeurs absolues (ou fonction positive) .....  0  1

intégrabilité du majorant .....  0  1

3)b)  $\frac{1}{(T+1)(T+u^2)} = \frac{1}{u^2-1} (\frac{1}{T+1} - \frac{1}{T+u^2})$  .....  0  1

3)c)  $\varphi(x) = \frac{\pi}{2x(x+1)}$  pour  $x \neq 1$  bien simplifiée .....  0  1

pas simplifiée .....  0  1

3)d)  $N_2(f)^2 = \lim_{1+} \varphi$ , citer 3.a .....  0  1

$N_2(f) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$  .....  0  1

4)  $G_x : t \mapsto \frac{\arctan(xt)}{t(t^2+1)}$  intégrable sur  $]0, \infty[$  car cpm .....  0  1

et  $\sim_0 x$  donc intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1

et  $O_\infty(1/t^3)$  sur  $[1, +\infty[$  .....  0  1

équivalent en  $\infty$  faux quand  $x=0$  .....  0  1

5)a)  $x \neq 0 ; \theta'(x) = \frac{1}{x^2} \varphi(\frac{1}{x})$  ou  $x\varphi(x)$  .....  0  1

$\theta'(x) = \frac{\pi}{2(x+1)}$  .....  0  1

$\theta'(0) = \frac{\pi}{2}$  .....  0  1

5)b) TFA .....  0  1

$\theta(x) = \frac{\pi}{2} \ln(1+x) + C$  .....  0  1

$C=0$  .....  0  1

5)c)  $N_1^2(f) = 2\theta(1)$  par IPP .....  0  1  2  3

5)d)  $N_1(f) = \sqrt{\pi \ln(2)}$  .....  0  1

$\frac{N_1(f)}{N_2(f)} = 2\sqrt{\ln(2)}$  .....  0  1

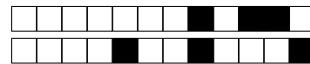
6)  $f'(t) = \frac{1+\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}}{t+\sqrt{t^2+1}}$  .....  0  1

$f'(t) = 1/(\sqrt{t^2+1})$  .....  0  1

$f \in E_1$  car  $f \in C^1([0, +\infty[)$  .....  0  1

et car  $f(0)=0$  .....  0  1

et car  $\int f'^2$  cv,  $N_2(f) = \sqrt{\pi/2}$  .....  0  1



- 7)  $f(t) \sim_0 t$  .....  0  1  
 $f(t) \sim_\infty \ln t$  .....  0  1  2

- 8)  $f \in E_1$  car  $t \mapsto (\frac{f(t)}{t})^2 \sim_0 1$  intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1  
et  $\sim_\infty \frac{\ln^2 t}{t^2}$  intégrable sur  $[1, +\infty[$  .....  0  1

- 9)a)  $-\ln t/(1-t^2)$  intégrable sur  $]0, 1[$  car cpm .....  0  1  
et  $\sim_0 -\ln t = 0(1/\sqrt{t})$  intégrable sur  $]0, \frac{1}{2}]$  .....  0  1  
et  $\sim_1 -(t-1)/(1-t^2) = 1/(t+1) \sim_1 1/2$  intégrable sur  $[\frac{1}{2}, 1[$  .....  0  1

- 9)b)  $-t^{2k} \ln t$  intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1  
 $\int = \frac{1}{(2k+1)^2}$  .....  0  1  2

- 9)c)  $J = \sum_0^\infty \int$  car  $\sum \int |.|$  converge .....  0  1  
et  $\sum -t^{2k} \ln t = -\frac{\ln t}{1-t^2}$  .....  0  1  
rappel des autres hypothèses .....  0  1

- 9)d)  $J = \pi^2/8$  .....  0  1  
justification .....  0  1

- 10)a)  $I = 2 \int \frac{f(t)}{t\sqrt{t^2+1}}$  .....  0  1  2

- 10)b)  $f$  bijective de  $\mathbb{R}_+^*$  dans  $\mathbb{R}_+^*$  ;  $f^{-1} = \text{sh}$  .....  0  1  2  3

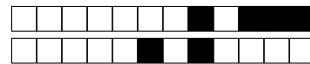
- 10)c) Justification cdv .....  0  1  
 $I = 2 \int \frac{u}{\text{sh} u}$  .....  0  1

- 10)d)  $I = 4J$  .....  0  1  
 $N_1(f) = \pi/\sqrt{2}$  .....  0  1  
 $\frac{N_1(f)}{N_2(f)} = \sqrt{\pi}$  .....  0  1
- 

- 11)a)  $h \rightarrow_0 \alpha$  .....  0  1  
 $g \rightarrow_0 0$  .....  0  1

- 11)b)  $f'(t) - \sqrt{t}g'(t) = h(t)/2$  .....  0  1  
11)c)  $\sqrt{t}g'(t) \rightarrow_0 \alpha/2$  .....  0  1

- $gg' \rightarrow_0 \alpha^2/2$  .....  0  1  
11)d)  $\int (f')^2 = g^2/2 + \int (\sqrt{t}g')^2 + \frac{1}{4} \int h^2$  .....  0  1  2  
justification des intégrabilités .....  0  1  
12)a)  $E_2 \subset E_1$  .....  0  1  2  
13)b)  $\sin \in E_1$  .....  0  1  2  
 $\sin \notin E_2$  .....  0  1  2  3  
..... .....  0  1  
..... .....  0  1  
..... .....  0  1



Nom : \_\_\_\_\_

## DS 2

Soin) .....  0  1  2  3

1)a) IPP :  $\int_2^x \frac{1}{\ln t} dt = \frac{x}{\ln x} + c_0 + \int_2^x g_0$  ;  $c_0 = -\frac{2}{\ln 2}$  ;  $g_0(t) = \frac{1}{(\ln t)^2}$   0  1  2

1)b)  $R_0 = o_\infty(\int_2^x \frac{1}{\ln t} dt)$  car  $\int_2^x \frac{1}{\ln t} dt$  diverge .....  0  1

et  $\frac{1}{(\ln t)^2} = o(\frac{1}{\ln t})$  .....  0  1

et  $1/\ln$  positive .....  0  1

1)c)  $R_0 \sim_\infty \frac{x}{\ln x}$  .....  0  1

car  $\int \frac{1}{\ln t} - R_0 \sim \int \frac{1}{\ln t}$  .....  0  1

et  $c_0 = o(\frac{x}{\ln x})$  .....  0  1

2)a)  $c_n = -2 \sum_0^n \frac{k!}{(\ln 2)^{k+1}}$  et  $g_n(t) = \frac{(n+1)!}{(\ln t)^{n+2}}$  .....  0  1  2  3

2)b))  $R_{n+1} = o(R_n)$  car  $1/\ln^{n+2} \geq 0$  et  $1/\ln^{n+3} = o_\infty(1/\ln^{n+2})$  .....  0  1

et car  $1/\ln^{n+2}$  non intégrable en  $\infty$  .....  0  1

2)c)  $R_n \sim (n+1)! \frac{x}{(\ln x)^{n+2}}$  .....  0  1  2

2)d)  $\int_2^x \frac{1}{\ln t} = \sum_{k=0}^n \frac{k!x}{(\ln x)^{k+1}} + o_{x \rightarrow +\infty}(\frac{x}{(\ln x)^{n+1}})$  .....  0  1

1)  $\arctan \in E_1$  car s'annule en 0 et  $C^1$  .....  0  1

et  $(\frac{\arctan t}{t})^2$  cpm .....  0  1

et  $(\frac{\arctan t}{t})^2$  intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1

et  $(\frac{\arctan t}{t})^2$  intégrable sur  $[1, +\infty[$  .....  0  1

2)  $H_u : t \mapsto \frac{1}{(t^2+1)(t^2+u)}$  intégrable sur  $[0, \infty[$  car continue sur  $[0, \infty[$  .....  0  1

et  $\sim_\infty 1/t^4$  donc intégrable sur  $[1, \infty[$  .....  0  1

$f' = \frac{1}{1+t^2}$  donc (avec  $u=1$ )  $f \in E_2$  .....  0  1

3)a)  $\varphi(u) \rightarrow \varphi(1)$  en  $1^+$  car  $t \mapsto H_u(t)$  cpm sur  $[0, \infty[$  .....  0  1

et  $H_u(t) \rightarrow H_1(t)$  .....  0  1

majoration indépendante de  $u$  par  $H_1(t)$  ou  $\frac{1}{1+t^2}$  .....  0  1

penser aux valeurs absolues (ou fonction positive) .....  0  1

intégrabilité du majorant .....  0  1

3)b)  $\frac{1}{(T+1)(T+u^2)} = \frac{1}{u^2-1} (\frac{1}{T+1} - \frac{1}{T+u^2})$  .....  0  1

3)c)  $\varphi(x) = \frac{\pi}{2x(x+1)}$  pour  $x \neq 1$  bien simplifiée .....  0  1

pas simplifiée .....  0  1

3)d)  $N_2(f)^2 = \lim_{1+} \varphi$ , citer 3.a .....  0  1

$N_2(f) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$  .....  0  1

4)  $G_x : t \mapsto \frac{\arctan(xt)}{t(t^2+1)}$  intégrable sur  $]0, \infty[$  car cpm .....  0  1

et  $\sim_0 x$  donc intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1

et  $O_\infty(1/t^3)$  sur  $[1, +\infty[$  .....  0  1

équivalent en  $\infty$  faux quand  $x=0$  .....  0  1

5)a)  $x \neq 0$  ;  $\theta'(x) = \frac{1}{x^2} \varphi(\frac{1}{x})$  ou  $x\varphi(x)$  .....  0  1

$\theta'(x) = \frac{\pi}{2(x+1)}$  .....  0  1

$\theta'(0) = \frac{\pi}{2}$  .....  0  1

5)b) TFA .....  0  1

$\theta(x) = \frac{\pi}{2} \ln(1+x) + C$  .....  0  1

$C=0$  .....  0  1

5)c)  $N_1^2(f) = 2\theta(1)$  par IPP .....  0  1  2  3

5)d)  $N_1(f) = \sqrt{\pi \ln(2)}$  .....  0  1

$\frac{N_1(f)}{N_2(f)} = 2\sqrt{\ln(2)}$  .....  0  1

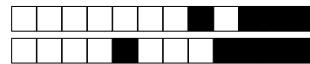
6)  $f'(t) = \frac{1+\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}}{t+\sqrt{t^2+1}}$  .....  0  1

$f'(t) = 1/(\sqrt{t^2+1})$  .....  0  1

$f \in E_1$  car  $f \in C^1([0, +\infty[)$  .....  0  1

et car  $f(0)=0$  .....  0  1

et car  $\int f'^2$  cv,  $N_2(f) = \sqrt{\pi/2}$  .....  0  1



- 7)  $f(t) \sim_0 t$  .....  0  1  
 $f(t) \sim_\infty \ln t$  .....  0  1  2

8)  $f \in E_1$  car  $t \mapsto (\frac{f(t)}{t})^2 \sim_0 1$  intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1  
et  $\sim_\infty \frac{\ln^2 t}{t^2}$  intégrable sur  $[1, +\infty[$  .....  0  1

- 9)a)  $-\ln t/(1-t^2)$  intégrable sur  $]0, 1[$  car cpm .....  0  1  
et  $\sim_0 -\ln t = 0(1/\sqrt{t})$  intégrable sur  $]0, \frac{1}{2}]$  .....  0  1  
et  $\sim_1 -(t-1)/(1-t^2) = 1/(t+1) \sim_1 1/2$  intégrable sur  $[\frac{1}{2}, 1[$  .....  0  1

- 9)b)  $-t^{2k} \ln t$  intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1  
 $\int = \frac{1}{(2k+1)^2}$  .....  0  1  2

- 9)c)  $J = \sum_0^\infty \int$  car  $\sum \int |.|$  converge .....  0  1  
et  $\sum -t^{2k} \ln t = -\frac{\ln t}{1-t^2}$  .....  0  1  
rappel des autres hypothèses .....  0  1

- 9)d)  $J = \pi^2/8$  .....  0  1  
justification .....  0  1

10)a)  $I = 2 \int \frac{f(t)}{t\sqrt{t^2+1}}$  .....  0  1  2

10)b)  $f$  bijective de  $\mathbb{R}_+^*$  dans  $\mathbb{R}_+^*$ ;  $f^{-1} = \text{sh}$  .....  0  1  2  3

10)c) Justification cdv .....  0  1  
 $I = 2 \int \frac{u}{\text{sh} u}$  .....  0  1

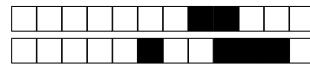
10)d)  $I = 4J$  .....  0  1  
 $N_1(f) = \pi/\sqrt{2}$  .....  0  1  
 $\frac{N_1(f)}{N_2(f)} = \sqrt{\pi}$  .....  0  1

---

11)a)  $h \rightarrow_0 \alpha$  .....  0  1  
 $g \rightarrow_0 0$  .....  0  1

11)b)  $f'(t) - \sqrt{t}g'(t) = h(t)/2$  .....  0  1  
11)c)  $\sqrt{t}g'(t) \rightarrow_0 \alpha/2$  .....  0  1

- $gg' \rightarrow_0 \alpha^2/2$  .....  0  1  
11)d)  $\int (f')^2 = g^2/2 + \int (\sqrt{t}g')^2 + \frac{1}{4} \int h^2$  .....  0  1  2  
justification des intégrabilités .....  0  1  
12)a)  $E_2 \subset E_1$  .....  0  1  2  
13)b)  $\sin \in E_1$  .....  0  1  2  
 $\sin \notin E_2$  .....  0  1  2  3  
..... .....  0  1  
..... .....  0  1  
..... .....  0  1



Nom : \_\_\_\_\_

## DS 2

Soin) .....  0  1  2  3

1)a) IPP :  $\int_2^x \frac{1}{\ln t} dt = \frac{x}{\ln x} + c_0 + \int_2^x g_0$  ;  $c_0 = -\frac{2}{\ln 2}$  ;  $g_0(t) = \frac{1}{(\ln t)^2}$   0  1  2

1)b)  $R_0 = o_\infty(\int_2^x \frac{1}{\ln t} dt)$  car  $\int_2^x \frac{1}{\ln t} dt$  diverge .....  0  1

et  $\frac{1}{(\ln t)^2} = o(\frac{1}{\ln t})$  .....  0  1

et  $1/\ln$  positive .....  0  1

1)c)  $R_0 \sim_\infty \frac{x}{\ln x}$  .....  0  1

car  $\int \frac{1}{\ln t} - R_0 \sim \int \frac{1}{\ln t}$  .....  0  1

et  $c_0 = o(\frac{x}{\ln x})$  .....  0  1

2)a)  $c_n = -2 \sum_{k=0}^n \frac{k!}{(\ln 2)^{k+1}}$  et  $g_n(t) = \frac{(n+1)!}{(\ln t)^{n+2}}$  .....  0  1  2  3

2)b))  $R_{n+1} = o(R_n)$  car  $1/\ln^{n+2} \geq 0$  et  $1/\ln^{n+3} = o_\infty(1/\ln^{n+2})$  .....  0  1

et car  $1/\ln^{n+2}$  non intégrable en  $\infty$  .....  0  1

2)c)  $R_n \sim (n+1)! \frac{x}{(\ln x)^{n+2}}$  .....  0  1  2

2)d)  $\int_2^x \frac{1}{\ln t} = \sum_{k=0}^n \frac{k!x}{(\ln x)^{k+1}} + o_{x \rightarrow +\infty}(\frac{x}{(\ln x)^{n+1}})$  .....  0  1

1)  $\arctan \in E_1$  car s'annule en 0 et  $C^1$  .....  0  1

et  $(\frac{\arctan t}{t})^2$  cpm .....  0  1

et  $(\frac{\arctan t}{t})^2$  intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1

et  $(\frac{\arctan t}{t})^2$  intégrable sur  $[1, +\infty[$  .....  0  1

2)  $H_u : t \mapsto \frac{1}{(t^2+1)(t^2+u)}$  intégrable sur  $[0, \infty[$  car continue sur  $[0, \infty[$  .....  0  1

et  $\sim_\infty 1/t^4$  donc intégrable sur  $[1, \infty[$  .....  0  1

$f' = \frac{1}{1+t^2}$  donc (avec  $u=1$ )  $f \in E_2$  .....  0  1

3)a)  $\varphi(u) \rightarrow \varphi(1)$  en  $1^+$  car  $t \mapsto H_u(t)$  cpm sur  $[0, \infty[$  .....  0  1

et  $H_u(t) \rightarrow H_1(t)$  .....  0  1

majoration indépendante de  $u$  par  $H_1(t)$  ou  $\frac{1}{1+t^2}$  .....  0  1

penser aux valeurs absolues (ou fonction positive) .....  0  1

intégrabilité du majorant .....  0  1

3)b)  $\frac{1}{(T+1)(T+u^2)} = \frac{1}{u^2-1} (\frac{1}{T+1} - \frac{1}{T+u^2})$  .....  0  1

3)c)  $\varphi(x) = \frac{\pi}{2x(x+1)}$  pour  $x \neq 1$  bien simplifiée .....  0  1

pas simplifiée .....  0  1

3)d)  $N_2(f)^2 = \lim_{1+} \varphi$ , citer 3.a .....  0  1

$N_2(f) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$  .....  0  1

4)  $G_x : t \mapsto \frac{\arctan(xt)}{t(t^2+1)}$  intégrable sur  $]0, \infty[$  car cpm .....  0  1

et  $\sim_0 x$  donc intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1

et  $O_\infty(1/t^3)$  sur  $[1, +\infty[$  .....  0  1

équivalent en  $\infty$  faux quand  $x=0$  .....  0  1

5)a)  $x \neq 0$  ;  $\theta'(x) = \frac{1}{x^2} \varphi(\frac{1}{x})$  ou  $x\varphi(x)$  .....  0  1

$\theta'(x) = \frac{\pi}{2(x+1)}$  .....  0  1

$\theta'(0) = \frac{\pi}{2}$  .....  0  1

5)b) TFA .....  0  1

$\theta(x) = \frac{\pi}{2} \ln(1+x) + C$  .....  0  1

$C=0$  .....  0  1

5)c)  $N_1^2(f) = 2\theta(1)$  par IPP .....  0  1  2  3

5)d)  $N_1(f) = \sqrt{\pi \ln(2)}$  .....  0  1

$\frac{N_1(f)}{N_2(f)} = 2\sqrt{\ln(2)}$  .....  0  1

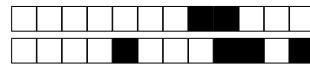
6)  $f'(t) = \frac{1+\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}}{t+\sqrt{t^2+1}}$  .....  0  1

$f'(t) = 1/(\sqrt{t^2+1})$  .....  0  1

$f \in E_1$  car  $f \in C^1([0, +\infty[)$  .....  0  1

et car  $f(0)=0$  .....  0  1

et car  $\int f'^2$  cv,  $N_2(f) = \sqrt{\pi/2}$  .....  0  1



- 7)  $f(t) \sim_0 t$  .....  0  1  
 $f(t) \sim_\infty \ln t$  .....  0  1  2

8)  $f \in E_1$  car  $t \mapsto (\frac{f(t)}{t})^2 \sim_0 1$  intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1  
et  $\sim_\infty \frac{\ln^2 t}{t^2}$  intégrable sur  $[1, +\infty[$  .....  0  1

9)a)  $-\ln t/(1-t^2)$  intégrable sur  $]0, 1[$  car cpm .....  0  1  
et  $\sim_0 -\ln t = 0(1/\sqrt{t})$  intégrable sur  $]0, \frac{1}{2}]$  .....  0  1  
et  $\sim_1 -(t-1)/(1-t^2) = 1/(t+1) \sim_1 1/2$  intégrable sur  $[\frac{1}{2}, 1[$  .....  0  1

9)b)  $-t^{2k} \ln t$  intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1  
 $\int = \frac{1}{(2k+1)^2}$  .....  0  1  2

9)c)  $J = \sum_0^\infty \int$  car  $\sum \int |.|$  converge .....  0  1  
et  $\sum -t^{2k} \ln t = -\frac{\ln t}{1-t^2}$  .....  0  1  
rappel des autres hypothèses .....  0  1

9)d)  $J = \pi^2/8$  .....  0  1  
justification .....  0  1

10)a)  $I = 2 \int \frac{f(t)}{t\sqrt{t^2+1}}$  .....  0  1  2

10)b)  $f$  bijective de  $\mathbb{R}_+^*$  dans  $\mathbb{R}_+^*$  ;  $f^{-1} = \text{sh}$  .....  0  1  2  3

10)c) Justification cdv .....  0  1  
 $I = 2 \int \frac{u}{\text{sh} u}$  .....  0  1

10)d)  $I = 4J$  .....  0  1  
 $N_1(f) = \pi/\sqrt{2}$  .....  0  1  
 $\frac{N_1(f)}{N_2(f)} = \sqrt{\pi}$  .....  0  1

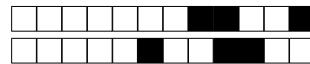
---

11)a)  $h \rightarrow_0 \alpha$  .....  0  1  
 $g \rightarrow_0 0$  .....  0  1

11)b)  $f'(t) - \sqrt{t}g'(t) = h(t)/2$  .....  0  1

11)c)  $\sqrt{t}g'(t) \rightarrow_0 \alpha/2$  .....  0  1

- $gg' \rightarrow_0 \alpha^2/2$  .....  0  1  
11)d)  $\int (f')^2 = g^2/2 + \int (\sqrt{t}g')^2 + \frac{1}{4} \int h^2$  .....  0  1  2  
justification des intégrabilités .....  0  1  
12)a)  $E_2 \subset E_1$  .....  0  1  2  
13)b)  $\sin \in E_1$  .....  0  1  2  
 $\sin \notin E_2$  .....  0  1  2  3  
..... .....  0  1  
..... .....  0  1  
..... .....  0  1



Nom : \_\_\_\_\_

## DS 2

Soin) .....  0  1  2  3

1)a) IPP :  $\int_2^x \frac{1}{\ln t} dt = \frac{x}{\ln x} + c_0 + \int_2^x g_0$  ;  $c_0 = -\frac{2}{\ln 2}$  ;  $g_0(t) = \frac{1}{(\ln t)^2}$   0  1  2

1)b)  $R_0 = o_\infty(\int_2^x \frac{1}{\ln t} dt)$  car  $\int_2^x \frac{1}{\ln t} dt$  diverge .....  0  1

et  $\frac{1}{(\ln t)^2} = o(\frac{1}{\ln t})$  .....  0  1

et  $1/\ln$  positive .....  0  1

1)c)  $R_0 \sim_\infty \frac{x}{\ln x}$  .....  0  1

car  $\int \frac{1}{\ln t} - R_0 \sim \int \frac{1}{\ln t}$  .....  0  1

et  $c_0 = o(\frac{x}{\ln x})$  .....  0  1

2)a)  $c_n = -2 \sum_0^n \frac{k!}{(\ln 2)^{k+1}}$  et  $g_n(t) = \frac{(n+1)!}{(\ln t)^{n+2}}$  .....  0  1  2  3

2)b))  $R_{n+1} = o(R_n)$  car  $1/\ln^{n+2} \geq 0$  et  $1/\ln^{n+3} = o_\infty(1/\ln^{n+2})$  .....  0  1

et car  $1/\ln^{n+2}$  non intégrable en  $\infty$  .....  0  1

2)c)  $R_n \sim (n+1)! \frac{x}{(\ln x)^{n+2}}$  .....  0  1  2

2)d)  $\int_2^x \frac{1}{\ln t} = \sum_{k=0}^n \frac{k!x}{(\ln x)^{k+1}} + o_{x \rightarrow +\infty}(\frac{x}{(\ln x)^{n+1}})$  .....  0  1

1)  $\arctan \in E_1$  car s'annule en 0 et  $C^1$  .....  0  1

et  $(\frac{\arctan t}{t})^2$  cpm .....  0  1

et  $(\frac{\arctan t}{t})^2$  intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1

et  $(\frac{\arctan t}{t})^2$  intégrable sur  $[1, +\infty[$  .....  0  1

2)  $H_u : t \mapsto \frac{1}{(t^2+1)(t^2+u)}$  intégrable sur  $[0, \infty[$  car continue sur  $[0, \infty[$  .....  0  1

et  $\sim_\infty 1/t^4$  donc intégrable sur  $[1, \infty[$  .....  0  1

$f' = \frac{1}{1+t^2}$  donc (avec  $u=1$ )  $f \in E_2$  .....  0  1

3)a)  $\varphi(u) \rightarrow \varphi(1)$  en  $1^+$  car  $t \mapsto H_u(t)$  cpm sur  $[0, \infty[$  .....  0  1

et  $H_u(t) \rightarrow H_1(t)$  .....  0  1

majoration indépendante de  $u$  par  $H_1(t)$  ou  $\frac{1}{1+t^2}$  .....  0  1

penser aux valeurs absolues (ou fonction positive) .....  0  1

intégrabilité du majorant .....  0  1

3)b)  $\frac{1}{(T+1)(T+u^2)} = \frac{1}{u^2-1} (\frac{1}{T+1} - \frac{1}{T+u^2})$  .....  0  1

3)c)  $\varphi(x) = \frac{\pi}{2x(x+1)}$  pour  $x \neq 1$  bien simplifiée .....  0  1

pas simplifiée .....  0  1

3)d)  $N_2(f)^2 = \lim_{1+} \varphi$ , citer 3.a .....  0  1

$N_2(f) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$  .....  0  1

4)  $G_x : t \mapsto \frac{\arctan(xt)}{t(t^2+1)}$  intégrable sur  $]0, \infty[$  car cpm .....  0  1

et  $\sim_0 x$  donc intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1

et  $O_\infty(1/t^3)$  sur  $[1, +\infty[$  .....  0  1

équivalent en  $\infty$  faux quand  $x=0$  .....  0  1

5)a)  $x \neq 0$  ;  $\theta'(x) = \frac{1}{x^2} \varphi(\frac{1}{x})$  ou  $x\varphi(x)$  .....  0  1

$\theta'(x) = \frac{\pi}{2(x+1)}$  .....  0  1

$\theta'(0) = \frac{\pi}{2}$  .....  0  1

5)b) TFA .....  0  1

$\theta(x) = \frac{\pi}{2} \ln(1+x) + C$  .....  0  1

$C=0$  .....  0  1

5)c)  $N_1^2(f) = 2\theta(1)$  par IPP .....  0  1  2  3

5)d)  $N_1(f) = \sqrt{\pi \ln(2)}$  .....  0  1

$\frac{N_1(f)}{N_2(f)} = 2\sqrt{\ln(2)}$  .....  0  1

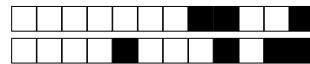
6)  $f'(t) = \frac{1+\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}}{t+\sqrt{t^2+1}}$  .....  0  1

$f'(t) = 1/(\sqrt{t^2+1})$  .....  0  1

$f \in E_1$  car  $f \in C^1([0, +\infty[)$  .....  0  1

et car  $f(0)=0$  .....  0  1

et car  $\int f'^2$  cv,  $N_2(f) = \sqrt{\pi/2}$  .....  0  1



- 7)  $f(t) \sim_0 t$  .....  0  1  
 $f(t) \sim_\infty \ln t$  .....  0  1  2

- 8)  $f \in E_1$  car  $t \mapsto (\frac{f(t)}{t})^2 \sim_0 1$  intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1  
et  $\sim_\infty \frac{\ln^2 t}{t^2}$  intégrable sur  $[1, +\infty[$  .....  0  1

- 9)a)  $-\ln t/(1-t^2)$  intégrable sur  $]0, 1[$  car cpm .....  0  1  
et  $\sim_0 -\ln t = 0(1/\sqrt{t})$  intégrable sur  $]0, \frac{1}{2}]$  .....  0  1  
et  $\sim_1 -(t-1)/(1-t^2) = 1/(t+1) \sim_1 1/2$  intégrable sur  $[\frac{1}{2}, 1[$  .....  0  1

- 9)b)  $-t^{2k} \ln t$  intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1  
 $\int = \frac{1}{(2k+1)^2}$  .....  0  1  2

- 9)c)  $J = \sum_0^\infty \int$  car  $\sum \int |.|$  converge .....  0  1  
et  $\sum -t^{2k} \ln t = -\frac{\ln t}{1-t^2}$  .....  0  1  
rappel des autres hypothèses .....  0  1

- 9)d)  $J = \pi^2/8$  .....  0  1  
justification .....  0  1

- 10)a)  $I = 2 \int \frac{f(t)}{t\sqrt{t^2+1}}$  .....  0  1  2

- 10)b)  $f$  bijective de  $\mathbb{R}_+^*$  dans  $\mathbb{R}_+^*$  ;  $f^{-1} = \text{sh}$  .....  0  1  2  3

- 10)c) Justification cdv .....  0  1  
 $I = 2 \int \frac{u}{\text{sh} u}$  .....  0  1

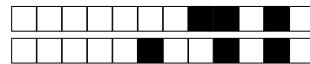
- 10)d)  $I = 4J$  .....  0  1  
 $N_1(f) = \pi/\sqrt{2}$  .....  0  1  
 $\frac{N_1(f)}{N_2(f)} = \sqrt{\pi}$  .....  0  1
- 

- 11)a)  $h \rightarrow_0 \alpha$  .....  0  1  
 $g \rightarrow_0 0$  .....  0  1

- 11)b)  $f'(t) - \sqrt{t}g'(t) = h(t)/2$  .....  0  1

- 11)c)  $\sqrt{t}g'(t) \rightarrow_0 \alpha/2$  .....  0  1

- $gg' \rightarrow_0 \alpha^2/2$  .....  0  1  
11)d)  $\int (f')^2 = g^2/2 + \int (\sqrt{t}g')^2 + \frac{1}{4} \int h^2$  .....  0  1  2  
justification des intégrabilités .....  0  1  
12)a)  $E_2 \subset E_1$  .....  0  1  2  
13)b)  $\sin \in E_1$  .....  0  1  2  
 $\sin \notin E_2$  .....  0  1  2  3  
..... .....  0  1  
..... .....  0  1  
..... .....  0  1



Nom : \_\_\_\_\_

## DS 2

Soin) .....  0  1  2  3

1)a) IPP :  $\int_2^x \frac{1}{\ln t} dt = \frac{x}{\ln x} + c_0 + \int_2^x g_0$  ;  $c_0 = -\frac{2}{\ln 2}$  ;  $g_0(t) = \frac{1}{(\ln t)^2}$   0  1  2

1)b)  $R_0 = o_\infty(\int_2^x \frac{1}{\ln t} dt)$  car  $\int_2^x \frac{1}{\ln t} dt$  diverge .....  0  1

et  $\frac{1}{(\ln t)^2} = o(\frac{1}{\ln t})$  .....  0  1

et  $1/\ln$  positive .....  0  1

1)c)  $R_0 \sim_\infty \frac{x}{\ln x}$  .....  0  1

car  $\int \frac{1}{\ln t} - R_0 \sim \int \frac{1}{\ln t}$  .....  0  1

et  $c_0 = o(\frac{x}{\ln x})$  .....  0  1

2)a)  $c_n = -2 \sum_0^n \frac{k!}{(\ln 2)^{k+1}}$  et  $g_n(t) = \frac{(n+1)!}{(\ln t)^{n+2}}$  .....  0  1  2  3

2)b))  $R_{n+1} = o(R_n)$  car  $1/\ln^{n+2} \geq 0$  et  $1/\ln^{n+3} = o_\infty(1/\ln^{n+2})$  .....  0  1

et car  $1/\ln^{n+2}$  non intégrable en  $\infty$  .....  0  1

2)c)  $R_n \sim (n+1)! \frac{x}{(\ln x)^{n+2}}$  .....  0  1  2

2)d)  $\int_2^x \frac{1}{\ln t} = \sum_{k=0}^n \frac{k!x}{(\ln x)^{k+1}} + o_{x \rightarrow +\infty}(\frac{x}{(\ln x)^{n+1}})$  .....  0  1

1)  $\arctan \in E_1$  car s'annule en 0 et  $C^1$  .....  0  1

et  $(\frac{\arctan t}{t})^2$  cpm .....  0  1

et  $(\frac{\arctan t}{t})^2$  intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1

et  $(\frac{\arctan t}{t})^2$  intégrable sur  $[1, +\infty[$  .....  0  1

2)  $H_u : t \mapsto \frac{1}{(t^2+1)(t^2+u)}$  intégrable sur  $[0, \infty[$  car continue sur  $[0, \infty[$  .....  0  1

et  $\sim_\infty 1/t^4$  donc intégrable sur  $[1, \infty[$  .....  0  1

$f' = \frac{1}{1+t^2}$  donc (avec  $u=1$ )  $f \in E_2$  .....  0  1

3)a)  $\varphi(u) \rightarrow \varphi(1)$  en  $1^+$  car  $t \mapsto H_u(t)$  cpm sur  $[0, \infty[$  .....  0  1

et  $H_u(t) \rightarrow H_1(t)$  .....  0  1

majoration indépendante de  $u$  par  $H_1(t)$  ou  $\frac{1}{1+t^2}$  .....  0  1

penser aux valeurs absolues (ou fonction positive) .....  0  1

intégrabilité du majorant .....  0  1

3)b)  $\frac{1}{(T+1)(T+u^2)} = \frac{1}{u^2-1} (\frac{1}{T+1} - \frac{1}{T+u^2})$  .....  0  1

3)c)  $\varphi(x) = \frac{\pi}{2x(x+1)}$  pour  $x \neq 1$  bien simplifiée .....  0  1

pas simplifiée .....  0  1

3)d)  $N_2(f)^2 = \lim_{1+} \varphi$ , citer 3.a .....  0  1

$N_2(f) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$  .....  0  1

4)  $G_x : t \mapsto \frac{\arctan(xt)}{t(t^2+1)}$  intégrable sur  $]0, \infty[$  car cpm .....  0  1

et  $\sim_0 x$  donc intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1

et  $O_\infty(1/t^3)$  sur  $[1, +\infty[$  .....  0  1

équivalent en  $\infty$  faux quand  $x=0$  .....  0  1

5)a)  $x \neq 0$  ;  $\theta'(x) = \frac{1}{x^2} \varphi(\frac{1}{x})$  ou  $x\varphi(x)$  .....  0  1

$\theta'(x) = \frac{\pi}{2(x+1)}$  .....  0  1

$\theta'(0) = \frac{\pi}{2}$  .....  0  1

5)b) TFA .....  0  1

$\theta(x) = \frac{\pi}{2} \ln(1+x) + C$  .....  0  1

$C=0$  .....  0  1

5)c)  $N_1^2(f) = 2\theta(1)$  par IPP .....  0  1  2  3

5)d)  $N_1(f) = \sqrt{\pi \ln(2)}$  .....  0  1

$\frac{N_1(f)}{N_2(f)} = 2\sqrt{\ln(2)}$  .....  0  1

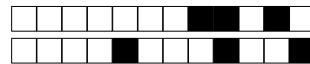
6)  $f'(t) = \frac{1+\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}}{t+\sqrt{t^2+1}}$  .....  0  1

$f'(t) = 1/(\sqrt{t^2+1})$  .....  0  1

$f \in E_1$  car  $f \in C^1([0, +\infty[)$  .....  0  1

et car  $f(0)=0$  .....  0  1

et car  $\int f'^2$  cv,  $N_2(f) = \sqrt{\pi/2}$  .....  0  1



- 7)  $f(t) \sim_0 t$  .....  0  1  
 $f(t) \sim_\infty \ln t$  .....  0  1  2

- 8)  $f \in E_1$  car  $t \mapsto (\frac{f(t)}{t})^2 \sim_0 1$  intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1  
et  $\sim_\infty \frac{\ln^2 t}{t^2}$  intégrable sur  $[1, +\infty[$  .....  0  1

- 9)a)  $-\ln t/(1-t^2)$  intégrable sur  $]0, 1[$  car cpm .....  0  1  
et  $\sim_0 -\ln t = 0(1/\sqrt{t})$  intégrable sur  $]0, \frac{1}{2}]$  .....  0  1  
et  $\sim_1 -(t-1)/(1-t^2) = 1/(t+1) \sim_1 1/2$  intégrable sur  $[\frac{1}{2}, 1[$  .....  0  1

- 9)b)  $-t^{2k} \ln t$  intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1  
 $\int = \frac{1}{(2k+1)^2}$  .....  0  1  2

- 9)c)  $J = \sum_0^\infty \int$  car  $\sum \int |.|$  converge .....  0  1  
et  $\sum -t^{2k} \ln t = -\frac{\ln t}{1-t^2}$  .....  0  1  
rappel des autres hypothèses .....  0  1

- 9)d)  $J = \pi^2/8$  .....  0  1  
justification .....  0  1

- 10)a)  $I = 2 \int \frac{f(t)}{t\sqrt{t^2+1}}$  .....  0  1  2

- 10)b)  $f$  bijective de  $\mathbb{R}_+^*$  dans  $\mathbb{R}_+^*$  ;  $f^{-1} = \text{sh}$  .....  0  1  2  3

- 10)c) Justification cdv .....  0  1  
 $I = 2 \int \frac{u}{\text{sh} u}$  .....  0  1

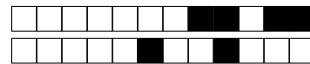
- 10)d)  $I = 4J$  .....  0  1  
 $N_1(f) = \pi/\sqrt{2}$  .....  0  1  
 $\frac{N_1(f)}{N_2(f)} = \sqrt{\pi}$  .....  0  1
- 

- 11)a)  $h \rightarrow_0 \alpha$  .....  0  1  
 $g \rightarrow_0 0$  .....  0  1

- 11)b)  $f'(t) - \sqrt{t}g'(t) = h(t)/2$  .....  0  1

- 11)c)  $\sqrt{t}g'(t) \rightarrow_0 \alpha/2$  .....  0  1

- $gg' \rightarrow_0 \alpha^2/2$  .....  0  1  
11)d)  $\int (f')^2 = g^2/2 + \int (\sqrt{t}g')^2 + \frac{1}{4} \int h^2$  .....  0  1  2  
justification des intégrabilités .....  0  1  
12)a)  $E_2 \subset E_1$  .....  0  1  2  
13)b)  $\sin \in E_1$  .....  0  1  2  
 $\sin \notin E_2$  .....  0  1  2  3  
..... .....  0  1  
..... .....  0  1  
..... .....  0  1



Nom : \_\_\_\_\_

## DS 2

Soin) .....  0  1  2  3

1)a) IPP :  $\int_2^x \frac{1}{\ln t} dt = \frac{x}{\ln x} + c_0 + \int_2^x g_0$  ;  $c_0 = -\frac{2}{\ln 2}$  ;  $g_0(t) = \frac{1}{(\ln t)^2}$   0  1  2

1)b)  $R_0 = o_\infty(\int_2^x \frac{1}{\ln t} dt)$  car  $\int_2^x \frac{1}{\ln t} dt$  diverge .....  0  1

et  $\frac{1}{(\ln t)^2} = o(\frac{1}{\ln t})$  .....  0  1

et  $1/\ln$  positive .....  0  1

1)c)  $R_0 \sim_\infty \frac{x}{\ln x}$  .....  0  1

car  $\int \frac{1}{\ln t} - R_0 \sim \int \frac{1}{\ln t}$  .....  0  1

et  $c_0 = o(\frac{x}{\ln x})$  .....  0  1

2)a)  $c_n = -2 \sum_0^n \frac{k!}{(\ln 2)^{k+1}}$  et  $g_n(t) = \frac{(n+1)!}{(\ln t)^{n+2}}$  .....  0  1  2  3

2)b))  $R_{n+1} = o(R_n)$  car  $1/\ln^{n+2} \geq 0$  et  $1/\ln^{n+3} = o_\infty(1/\ln^{n+2})$  .....  0  1

et car  $1/\ln^{n+2}$  non intégrable en  $\infty$  .....  0  1

2)c)  $R_n \sim (n+1)! \frac{x}{(\ln x)^{n+2}}$  .....  0  1  2

2)d)  $\int_2^x \frac{1}{\ln t} = \sum_{k=0}^n \frac{k!x}{(\ln x)^{k+1}} + o_{x \rightarrow +\infty}(\frac{x}{(\ln x)^{n+1}})$  .....  0  1

1)  $\arctan \in E_1$  car s'annule en 0 et  $C^1$  .....  0  1

et  $(\frac{\arctan t}{t})^2$  cpm .....  0  1

et  $(\frac{\arctan t}{t})^2$  intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1

et  $(\frac{\arctan t}{t})^2$  intégrable sur  $[1, +\infty[$  .....  0  1

2)  $H_u : t \mapsto \frac{1}{(t^2+1)(t^2+u)}$  intégrable sur  $[0, \infty[$  car continue sur  $[0, \infty[$  .....  0  1

et  $\sim_\infty 1/t^4$  donc intégrable sur  $[1, \infty[$  .....  0  1

$f' = \frac{1}{1+t^2}$  donc (avec  $u=1$ )  $f \in E_2$  .....  0  1

3)a)  $\varphi(u) \rightarrow \varphi(1)$  en  $1^+$  car  $t \mapsto H_u(t)$  cpm sur  $[0, \infty[$  .....  0  1

et  $H_u(t) \rightarrow H_1(t)$  .....  0  1

majoration indépendante de  $u$  par  $H_1(t)$  ou  $\frac{1}{1+t^2}$  .....  0  1

penser aux valeurs absolues (ou fonction positive) .....  0  1

intégrabilité du majorant .....  0  1

3)b)  $\frac{1}{(T+1)(T+u^2)} = \frac{1}{u^2-1} (\frac{1}{T+1} - \frac{1}{T+u^2})$  .....  0  1

3)c)  $\varphi(x) = \frac{\pi}{2x(x+1)}$  pour  $x \neq 1$  bien simplifiée .....  0  1

pas simplifiée .....  0  1

3)d)  $N_2(f)^2 = \lim_{1+} \varphi$ , citer 3.a .....  0  1

$N_2(f) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$  .....  0  1

4)  $G_x : t \mapsto \frac{\arctan(xt)}{t(t^2+1)}$  intégrable sur  $]0, \infty[$  car cpm .....  0  1

et  $\sim_0 x$  donc intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1

et  $O_\infty(1/t^3)$  sur  $[1, +\infty[$  .....  0  1

équivalent en  $\infty$  faux quand  $x=0$  .....  0  1

5)a)  $x \neq 0$  ;  $\theta'(x) = \frac{1}{x^2} \varphi(\frac{1}{x})$  ou  $x\varphi(x)$  .....  0  1

$\theta'(x) = \frac{\pi}{2(x+1)}$  .....  0  1

$\theta'(0) = \frac{\pi}{2}$  .....  0  1

5)b) TFA .....  0  1

$\theta(x) = \frac{\pi}{2} \ln(1+x) + C$  .....  0  1

$C=0$  .....  0  1

5)c)  $N_1^2(f) = 2\theta(1)$  par IPP .....  0  1  2  3

5)d)  $N_1(f) = \sqrt{\pi \ln(2)}$  .....  0  1

$\frac{N_1(f)}{N_2(f)} = 2\sqrt{\ln(2)}$  .....  0  1

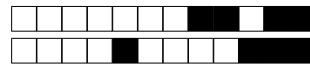
6)  $f'(t) = \frac{1+\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}}{t+\sqrt{t^2+1}}$  .....  0  1

$f'(t) = 1/(\sqrt{t^2+1})$  .....  0  1

$f \in E_1$  car  $f \in C^1([0, +\infty[)$  .....  0  1

et car  $f(0)=0$  .....  0  1

et car  $\int f'^2$  cv,  $N_2(f) = \sqrt{\pi/2}$  .....  0  1



- 7)  $f(t) \sim_0 t$  .....  0  1  
 $f(t) \sim_\infty \ln t$  .....  0  1  2

- 8)  $f \in E_1$  car  $t \mapsto (\frac{f(t)}{t})^2 \sim_0 1$  intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1  
et  $\sim_\infty \frac{\ln^2 t}{t^2}$  intégrable sur  $[1, +\infty[$  .....  0  1

- 9)a)  $-\ln t/(1-t^2)$  intégrable sur  $]0, 1[$  car cpm .....  0  1  
et  $\sim_0 -\ln t = 0(1/\sqrt{t})$  intégrable sur  $]0, \frac{1}{2}]$  .....  0  1  
et  $\sim_1 -(t-1)/(1-t^2) = 1/(t+1) \sim_1 1/2$  intégrable sur  $[\frac{1}{2}, 1[$  .....  0  1

- 9)b)  $-t^{2k} \ln t$  intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1  
 $\int = \frac{1}{(2k+1)^2}$  .....  0  1  2

- 9)c)  $J = \sum_0^\infty \int$  car  $\sum \int |.|$  converge .....  0  1  
et  $\sum -t^{2k} \ln t = -\frac{\ln t}{1-t^2}$  .....  0  1  
rappel des autres hypothèses .....  0  1

- 9)d)  $J = \pi^2/8$  .....  0  1  
justification .....  0  1

- 10)a)  $I = 2 \int \frac{f(t)}{t\sqrt{t^2+1}}$  .....  0  1  2

- 10)b)  $f$  bijective de  $\mathbb{R}_+^*$  dans  $\mathbb{R}_+^*$  ;  $f^{-1} = \text{sh}$  .....  0  1  2  3

- 10)c) Justification cdv .....  0  1  
 $I = 2 \int \frac{u}{\text{sh} u}$  .....  0  1

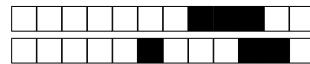
- 10)d)  $I = 4J$  .....  0  1  
 $N_1(f) = \pi/\sqrt{2}$  .....  0  1  
 $\frac{N_1(f)}{N_2(f)} = \sqrt{\pi}$  .....  0  1
- 

- 11)a)  $h \rightarrow_0 \alpha$  .....  0  1  
 $g \rightarrow_0 0$  .....  0  1

- 11)b)  $f'(t) - \sqrt{t}g'(t) = h(t)/2$  .....  0  1

- 11)c)  $\sqrt{t}g'(t) \rightarrow_0 \alpha/2$  .....  0  1

- $gg' \rightarrow_0 \alpha^2/2$  .....  0  1  
11)d)  $\int (f')^2 = g^2/2 + \int (\sqrt{t}g')^2 + \frac{1}{4} \int h^2$  .....  0  1  2  
justification des intégrabilités .....  0  1  
12)a)  $E_2 \subset E_1$  .....  0  1  2  
13)b)  $\sin \in E_1$  .....  0  1  2  
 $\sin \notin E_2$  .....  0  1  2  3  
..... .....  0  1  
..... .....  0  1  
..... .....  0  1



Nom : \_\_\_\_\_

## DS 2

Soin) .....  0  1  2  3

1)a) IPP :  $\int_2^x \frac{1}{\ln t} dt = \frac{x}{\ln x} + c_0 + \int_2^x g_0$  ;  $c_0 = -\frac{2}{\ln 2}$  ;  $g_0(t) = \frac{1}{(\ln t)^2}$   0  1  2

1)b)  $R_0 = o_\infty(\int_2^x \frac{1}{\ln t} dt)$  car  $\int_2^x \frac{1}{\ln t} dt$  diverge .....  0  1

et  $\frac{1}{(\ln t)^2} = o(\frac{1}{\ln t})$  .....  0  1

et  $1/\ln$  positive .....  0  1

1)c)  $R_0 \sim_\infty \frac{x}{\ln x}$  .....  0  1

car  $\int \frac{1}{\ln t} - R_0 \sim \int \frac{1}{\ln t}$  .....  0  1

et  $c_0 = o(\frac{x}{\ln x})$  .....  0  1

2)a)  $c_n = -2 \sum_0^n \frac{k!}{(\ln 2)^{k+1}}$  et  $g_n(t) = \frac{(n+1)!}{(\ln t)^{n+2}}$  .....  0  1  2  3

2)b))  $R_{n+1} = o(R_n)$  car  $1/\ln^{n+2} \geq 0$  et  $1/\ln^{n+3} = o_\infty(1/\ln^{n+2})$  .....  0  1

et car  $1/\ln^{n+2}$  non intégrable en  $\infty$  .....  0  1

2)c)  $R_n \sim (n+1)! \frac{x}{(\ln x)^{n+2}}$  .....  0  1  2

2)d)  $\int_2^x \frac{1}{\ln t} = \sum_{k=0}^n \frac{k!x}{(\ln x)^{k+1}} + o_{x \rightarrow +\infty}(\frac{x}{(\ln x)^{n+1}})$  .....  0  1

1)  $\arctan \in E_1$  car s'annule en 0 et  $C^1$  .....  0  1

et  $(\frac{\arctan t}{t})^2$  cpm .....  0  1

et  $(\frac{\arctan t}{t})^2$  intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1

et  $(\frac{\arctan t}{t})^2$  intégrable sur  $[1, +\infty[$  .....  0  1

2)  $H_u : t \mapsto \frac{1}{(t^2+1)(t^2+u)}$  intégrable sur  $[0, \infty[$  car continue sur  $[0, \infty[$  .....  0  1

et  $\sim_\infty 1/t^4$  donc intégrable sur  $[1, \infty[$  .....  0  1

$f' = \frac{1}{1+t^2}$  donc (avec  $u=1$ )  $f \in E_2$  .....  0  1

3)a)  $\varphi(u) \rightarrow \varphi(1)$  en  $1^+$  car  $t \mapsto H_u(t)$  cpm sur  $[0, \infty[$  .....  0  1

et  $H_u(t) \rightarrow H_1(t)$  .....  0  1

majoration indépendante de  $u$  par  $H_1(t)$  ou  $\frac{1}{1+t^2}$  .....  0  1

penser aux valeurs absolues (ou fonction positive) .....  0  1

intégrabilité du majorant .....  0  1

3)b)  $\frac{1}{(T+1)(T+u^2)} = \frac{1}{u^2-1} (\frac{1}{T+1} - \frac{1}{T+u^2})$  .....  0  1

3)c)  $\varphi(x) = \frac{\pi}{2x(x+1)}$  pour  $x \neq 1$  bien simplifiée .....  0  1

pas simplifiée .....  0  1

3)d)  $N_2(f)^2 = \lim_{1+} \varphi$ , citer 3.a .....  0  1

$N_2(f) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$  .....  0  1

4)  $G_x : t \mapsto \frac{\arctan(xt)}{t(t^2+1)}$  intégrable sur  $]0, \infty[$  car cpm .....  0  1

et  $\sim_0 x$  donc intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1

et  $O_\infty(1/t^3)$  sur  $[1, +\infty[$  .....  0  1

équivalent en  $\infty$  faux quand  $x=0$  .....  0  1

5)a)  $x \neq 0$  ;  $\theta'(x) = \frac{1}{x^2} \varphi(\frac{1}{x})$  ou  $x\varphi(x)$  .....  0  1

$\theta'(x) = \frac{\pi}{2(x+1)}$  .....  0  1

$\theta'(0) = \frac{\pi}{2}$  .....  0  1

5)b) TFA .....  0  1

$\theta(x) = \frac{\pi}{2} \ln(1+x) + C$  .....  0  1

$C=0$  .....  0  1

5)c)  $N_1^2(f) = 2\theta(1)$  par IPP .....  0  1  2  3

5)d)  $N_1(f) = \sqrt{\pi \ln(2)}$  .....  0  1

$\frac{N_1(f)}{N_2(f)} = 2\sqrt{\ln(2)}$  .....  0  1

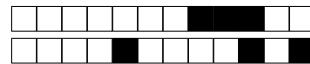
6)  $f'(t) = \frac{1+\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}}{t+\sqrt{t^2+1}}$  .....  0  1

$f'(t) = 1/(\sqrt{t^2+1})$  .....  0  1

$f \in E_1$  car  $f \in C^1([0, +\infty[)$  .....  0  1

et car  $f(0)=0$  .....  0  1

et car  $\int f'^2$  cv,  $N_2(f) = \sqrt{\pi/2}$  .....  0  1



- 7)  $f(t) \sim_0 t$  .....  0  1  
 $f(t) \sim_\infty \ln t$  .....  0  1  2

8)  $f \in E_1$  car  $t \mapsto (\frac{f(t)}{t})^2 \sim_0 1$  intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1  
et  $\sim_\infty \frac{\ln^2 t}{t^2}$  intégrable sur  $[1, +\infty[$  .....  0  1

9)a)  $-\ln t/(1-t^2)$  intégrable sur  $]0, 1[$  car cpm .....  0  1  
et  $\sim_0 -\ln t = 0(1/\sqrt{t})$  intégrable sur  $]0, \frac{1}{2}]$  .....  0  1  
et  $\sim_1 -(t-1)/(1-t^2) = 1/(t+1) \sim_1 1/2$  intégrable sur  $[\frac{1}{2}, 1[$  .....  0  1

9)b)  $-t^{2k} \ln t$  intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1  
 $\int = \frac{1}{(2k+1)^2}$  .....  0  1  2

9)c)  $J = \sum_0^\infty \int$  car  $\sum \int |.|$  converge .....  0  1  
et  $\sum -t^{2k} \ln t = -\frac{\ln t}{1-t^2}$  .....  0  1  
rappel des autres hypothèses .....  0  1

9)d)  $J = \pi^2/8$  .....  0  1  
justification .....  0  1

10)a)  $I = 2 \int \frac{f(t)}{t\sqrt{t^2+1}}$  .....  0  1  2

10)b)  $f$  bijective de  $\mathbb{R}_+^*$  dans  $\mathbb{R}_+^*$  ;  $f^{-1} = \text{sh}$  .....  0  1  2  3

10)c) Justification cdv .....  0  1  
 $I = 2 \int \frac{u}{\text{sh} u}$  .....  0  1

10)d)  $I = 4J$  .....  0  1  
 $N_1(f) = \pi/\sqrt{2}$  .....  0  1  
 $\frac{N_1(f)}{N_2(f)} = \sqrt{\pi}$  .....  0  1

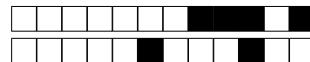
---

11)a)  $h \rightarrow_0 \alpha$  .....  0  1  
 $g \rightarrow_0 0$  .....  0  1

11)b)  $f'(t) - \sqrt{t}g'(t) = h(t)/2$  .....  0  1

11)c)  $\sqrt{t}g'(t) \rightarrow_0 \alpha/2$  .....  0  1

- $gg' \rightarrow_0 \alpha^2/2$  .....  0  1  
11)d)  $\int (f')^2 = g^2/2 + \int (\sqrt{t}g')^2 + \frac{1}{4} \int h^2$  .....  0  1  2  
justification des intégrabilités .....  0  1  
12)a)  $E_2 \subset E_1$  .....  0  1  2  
13)b)  $\sin \in E_1$  .....  0  1  2  
 $\sin \notin E_2$  .....  0  1  2  3  
..... .....  0  1  
..... .....  0  1  
..... .....  0  1



Nom : \_\_\_\_\_

## DS 2

Soin) .....  0  1  2  3

1)a) IPP :  $\int_2^x \frac{1}{\ln t} dt = \frac{x}{\ln x} + c_0 + \int_2^x g_0$  ;  $c_0 = -\frac{2}{\ln 2}$  ;  $g_0(t) = \frac{1}{(\ln t)^2}$   0  1  2

1)b)  $R_0 = o_\infty(\int_2^x \frac{1}{\ln t} dt)$  car  $\int_2^x \frac{1}{\ln t} dt$  diverge .....  0  1

et  $\frac{1}{(\ln t)^2} = o(\frac{1}{\ln t})$  .....  0  1

et  $1/\ln$  positive .....  0  1

1)c)  $R_0 \sim_\infty \frac{x}{\ln x}$  .....  0  1

car  $\int \frac{1}{\ln t} - R_0 \sim \int \frac{1}{\ln t}$  .....  0  1

et  $c_0 = o(\frac{x}{\ln x})$  .....  0  1

2)a)  $c_n = -2 \sum_0^n \frac{k!}{(\ln 2)^{k+1}}$  et  $g_n(t) = \frac{(n+1)!}{(\ln t)^{n+2}}$  .....  0  1  2  3

2)b))  $R_{n+1} = o(R_n)$  car  $1/\ln^{n+2} \geq 0$  et  $1/\ln^{n+3} = o_\infty(1/\ln^{n+2})$  .....  0  1

et car  $1/\ln^{n+2}$  non intégrable en  $\infty$  .....  0  1

2)c)  $R_n \sim (n+1)! \frac{x}{(\ln x)^{n+2}}$  .....  0  1  2

2)d)  $\int_2^x \frac{1}{\ln t} = \sum_{k=0}^n \frac{k!x}{(\ln x)^{k+1}} + o_{x \rightarrow +\infty}(\frac{x}{(\ln x)^{n+1}})$  .....  0  1

1)  $\arctan \in E_1$  car s'annule en 0 et  $C^1$  .....  0  1

et  $(\frac{\arctan t}{t})^2$  cpm .....  0  1

et  $(\frac{\arctan t}{t})^2$  intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1

et  $(\frac{\arctan t}{t})^2$  intégrable sur  $[1, +\infty[$  .....  0  1

2)  $H_u : t \mapsto \frac{1}{(t^2+1)(t^2+u)}$  intégrable sur  $[0, \infty[$  car continue sur  $[0, \infty[$  .....  0  1

et  $\sim_\infty 1/t^4$  donc intégrable sur  $[1, \infty[$  .....  0  1

$f' = \frac{1}{1+t^2}$  donc (avec  $u=1$ )  $f \in E_2$  .....  0  1

3)a)  $\varphi(u) \rightarrow \varphi(1)$  en  $1^+$  car  $t \mapsto H_u(t)$  cpm sur  $[0, \infty[$  .....  0  1

et  $H_u(t) \rightarrow H_1(t)$  .....  0  1

majoration indépendante de  $u$  par  $H_1(t)$  ou  $\frac{1}{1+t^2}$  .....  0  1

penser aux valeurs absolues (ou fonction positive) .....  0  1

intégrabilité du majorant .....  0  1

3)b)  $\frac{1}{(T+1)(T+u^2)} = \frac{1}{u^2-1} (\frac{1}{T+1} - \frac{1}{T+u^2})$  .....  0  1

3)c)  $\varphi(x) = \frac{\pi}{2x(x+1)}$  pour  $x \neq 1$  bien simplifiée .....  0  1

pas simplifiée .....  0  1

3)d)  $N_2(f)^2 = \lim_{1+} \varphi$ , citer 3.a .....  0  1

$N_2(f) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$  .....  0  1

4)  $G_x : t \mapsto \frac{\arctan(xt)}{t(t^2+1)}$  intégrable sur  $]0, \infty[$  car cpm .....  0  1

et  $\sim_0 x$  donc intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1

et  $O_\infty(1/t^3)$  sur  $[1, +\infty[$  .....  0  1

équivalent en  $\infty$  faux quand  $x=0$  .....  0  1

5)a)  $x \neq 0$  ;  $\theta'(x) = \frac{1}{x^2} \varphi(\frac{1}{x})$  ou  $x\varphi(x)$  .....  0  1

$\theta'(x) = \frac{\pi}{2(x+1)}$  .....  0  1

$\theta'(0) = \frac{\pi}{2}$  .....  0  1

5)b) TFA .....  0  1

$\theta(x) = \frac{\pi}{2} \ln(1+x) + C$  .....  0  1

$C = 0$  .....  0  1

5)c)  $N_1^2(f) = 2\theta(1)$  par IPP .....  0  1  2  3

5)d)  $N_1(f) = \sqrt{\pi \ln(2)}$  .....  0  1

$\frac{N_1(f)}{N_2(f)} = 2\sqrt{\ln(2)}$  .....  0  1

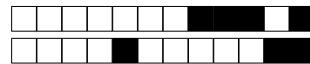
6)  $f'(t) = \frac{1+\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}}{t+\sqrt{t^2+1}}$  .....  0  1

$f'(t) = 1/(\sqrt{t^2+1})$  .....  0  1

$f \in E_1$  car  $f \in C^1([0, +\infty[)$  .....  0  1

et car  $f(0)=0$  .....  0  1

et car  $\int f'^2$  cv,  $N_2(f) = \sqrt{\pi/2}$  .....  0  1



- 7)  $f(t) \sim_0 t$  .....  0  1  
 $f(t) \sim_\infty \ln t$  .....  0  1  2

8)  $f \in E_1$  car  $t \mapsto (\frac{f(t)}{t})^2 \sim_0 1$  intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1  
et  $\sim_\infty \frac{\ln^2 t}{t^2}$  intégrable sur  $[1, +\infty[$  .....  0  1

9)a)  $-\ln t/(1-t^2)$  intégrable sur  $]0, 1[$  car cpm .....  0  1  
et  $\sim_0 -\ln t = 0(1/\sqrt{t})$  intégrable sur  $]0, \frac{1}{2}]$  .....  0  1  
et  $\sim_1 -(t-1)/(1-t^2) = 1/(t+1) \sim_1 1/2$  intégrable sur  $[\frac{1}{2}, 1[$  .....  0  1

9)b)  $-t^{2k} \ln t$  intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1  
 $\int = \frac{1}{(2k+1)^2}$  .....  0  1  2

9)c)  $J = \sum_0^\infty \int$  car  $\sum \int |.|$  converge .....  0  1  
et  $\sum -t^{2k} \ln t = -\frac{\ln t}{1-t^2}$  .....  0  1  
rappel des autres hypothèses .....  0  1

9)d)  $J = \pi^2/8$  .....  0  1  
justification .....  0  1

10)a)  $I = 2 \int \frac{f(t)}{t\sqrt{t^2+1}}$  .....  0  1  2

10)b)  $f$  bijective de  $\mathbb{R}_+^*$  dans  $\mathbb{R}_+^*$ ;  $f^{-1} = \text{sh}$  .....  0  1  2  3

10)c) Justification cdv .....  0  1  
 $I = 2 \int \frac{u}{\text{sh} u}$  .....  0  1

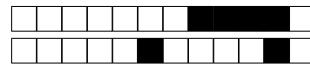
10)d)  $I = 4J$  .....  0  1  
 $N_1(f) = \pi/\sqrt{2}$  .....  0  1  
 $\frac{N_1(f)}{N_2(f)} = \sqrt{\pi}$  .....  0  1

---

11)a)  $h \rightarrow_0 \alpha$  .....  0  1  
 $g \rightarrow_0 0$  .....  0  1

11)b)  $f'(t) - \sqrt{t}g'(t) = h(t)/2$  .....  0  1  
11)c)  $\sqrt{t}g'(t) \rightarrow_0 \alpha/2$  .....  0  1

- $gg' \rightarrow_0 \alpha^2/2$  .....  0  1  
11)d)  $\int (f')^2 = g^2/2 + \int (\sqrt{t}g')^2 + \frac{1}{4} \int h^2$  .....  0  1  2  
justification des intégrabilités .....  0  1  
12)a)  $E_2 \subset E_1$  .....  0  1  2  
13)b)  $\sin \in E_1$  .....  0  1  2  
 $\sin \notin E_2$  .....  0  1  2  3  
..... .....  0  1  
..... .....  0  1  
..... .....  0  1



Nom : \_\_\_\_\_

## DS 2

Soin) .....  0  1  2  3

1)a) IPP :  $\int_2^x \frac{1}{\ln t} dt = \frac{x}{\ln x} + c_0 + \int_2^x g_0$  ;  $c_0 = -\frac{2}{\ln 2}$  ;  $g_0(t) = \frac{1}{(\ln t)^2}$   0  1  2

1)b)  $R_0 = o_\infty(\int_2^x \frac{1}{\ln t} dt)$  car  $\int_2^x \frac{1}{\ln t} dt$  diverge .....  0  1

et  $\frac{1}{(\ln t)^2} = o(\frac{1}{\ln t})$  .....  0  1

et  $1/\ln$  positive .....  0  1

1)c)  $R_0 \sim_\infty \frac{x}{\ln x}$  .....  0  1

car  $\int \frac{1}{\ln t} - R_0 \sim \int \frac{1}{\ln t}$  .....  0  1

et  $c_0 = o(\frac{x}{\ln x})$  .....  0  1

2)a)  $c_n = -2 \sum_{k=0}^n \frac{k!}{(\ln 2)^{k+1}}$  et  $g_n(t) = \frac{(n+1)!}{(\ln t)^{n+2}}$  .....  0  1  2  3

2)b))  $R_{n+1} = o(R_n)$  car  $1/\ln^{n+2} \geq 0$  et  $1/\ln^{n+3} = o_\infty(1/\ln^{n+2})$  .....  0  1

et car  $1/\ln^{n+2}$  non intégrable en  $\infty$  .....  0  1

2)c)  $R_n \sim (n+1)! \frac{x}{(\ln x)^{n+2}}$  .....  0  1  2

2)d)  $\int_2^x \frac{1}{\ln t} = \sum_{k=0}^n \frac{k!x}{(\ln x)^{k+1}} + o_{x \rightarrow +\infty}(\frac{x}{(\ln x)^{n+1}})$  .....  0  1

1)  $\arctan \in E_1$  car s'annule en 0 et  $C^1$  .....  0  1

et  $(\frac{\arctan t}{t})^2$  cpm .....  0  1

et  $(\frac{\arctan t}{t})^2$  intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1

et  $(\frac{\arctan t}{t})^2$  intégrable sur  $[1, +\infty[$  .....  0  1

2)  $H_u : t \mapsto \frac{1}{(t^2+1)(t^2+u)}$  intégrable sur  $[0, \infty[$  car continue sur  $[0, \infty[$  .....  0  1

et  $\sim_\infty 1/t^4$  donc intégrable sur  $[1, \infty[$  .....  0  1

$f' = \frac{1}{1+t^2}$  donc (avec  $u=1$ )  $f \in E_2$  .....  0  1

3)a)  $\varphi(u) \rightarrow \varphi(1)$  en  $1^+$  car  $t \mapsto H_u(t)$  cpm sur  $[0, \infty[$  .....  0  1

et  $H_u(t) \rightarrow H_1(t)$  .....  0  1

majoration indépendante de  $u$  par  $H_1(t)$  ou  $\frac{1}{1+t^2}$  .....  0  1

penser aux valeurs absolues (ou fonction positive) .....  0  1

intégrabilité du majorant .....  0  1

3)b)  $\frac{1}{(T+1)(T+u^2)} = \frac{1}{u^2-1} (\frac{1}{T+1} - \frac{1}{T+u^2})$  .....  0  1

3)c)  $\varphi(x) = \frac{\pi}{2x(x+1)}$  pour  $x \neq 1$  bien simplifiée .....  0  1

pas simplifiée .....  0  1

3)d)  $N_2(f)^2 = \lim_{1+} \varphi$ , citer 3.a .....  0  1

$N_2(f) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$  .....  0  1

4)  $G_x : t \mapsto \frac{\arctan(xt)}{t(t^2+1)}$  intégrable sur  $]0, \infty[$  car cpm .....  0  1

et  $\sim_0 x$  donc intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1

et  $O_\infty(1/t^3)$  sur  $[1, +\infty[$  .....  0  1

équivalent en  $\infty$  faux quand  $x=0$  .....  0  1

5)a)  $x \neq 0$  ;  $\theta'(x) = \frac{1}{x^2} \varphi(\frac{1}{x})$  ou  $x\varphi(x)$  .....  0  1

$\theta'(x) = \frac{\pi}{2(x+1)}$  .....  0  1

$\theta'(0) = \frac{\pi}{2}$  .....  0  1

5)b) TFA .....  0  1

$\theta(x) = \frac{\pi}{2} \ln(1+x) + C$  .....  0  1

$C=0$  .....  0  1

5)c)  $N_1^2(f) = 2\theta(1)$  par IPP .....  0  1  2  3

5)d)  $N_1(f) = \sqrt{\pi \ln(2)}$  .....  0  1

$\frac{N_1(f)}{N_2(f)} = 2\sqrt{\ln(2)}$  .....  0  1

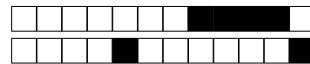
6)  $f'(t) = \frac{1+\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}}{t+\sqrt{t^2+1}}$  .....  0  1

$f'(t) = 1/(\sqrt{t^2+1})$  .....  0  1

$f \in E_1$  car  $f \in C^1([0, +\infty[)$  .....  0  1

et car  $f(0)=0$  .....  0  1

et car  $\int f'^2$  cv,  $N_2(f) = \sqrt{\pi/2}$  .....  0  1



- 7)  $f(t) \sim_0 t$  .....  0  1  
 $f(t) \sim_\infty \ln t$  .....  0  1  2

- 8)  $f \in E_1$  car  $t \mapsto (\frac{f(t)}{t})^2 \sim_0 1$  intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1  
et  $\sim_\infty \frac{\ln^2 t}{t^2}$  intégrable sur  $[1, +\infty[$  .....  0  1

- 9)a)  $-\ln t/(1-t^2)$  intégrable sur  $]0, 1[$  car cpm .....  0  1  
et  $\sim_0 -\ln t = 0(1/\sqrt{t})$  intégrable sur  $]0, \frac{1}{2}]$  .....  0  1  
et  $\sim_1 -(t-1)/(1-t^2) = 1/(t+1) \sim_1 1/2$  intégrable sur  $[\frac{1}{2}, 1[$  .....  0  1

- 9)b)  $-t^{2k} \ln t$  intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1  
 $\int = \frac{1}{(2k+1)^2}$  .....  0  1  2

- 9)c)  $J = \sum_0^\infty \int$  car  $\sum \int |.|$  converge .....  0  1  
et  $\sum -t^{2k} \ln t = -\frac{\ln t}{1-t^2}$  .....  0  1  
rappel des autres hypothèses .....  0  1

- 9)d)  $J = \pi^2/8$  .....  0  1  
justification .....  0  1

- 10)a)  $I = 2 \int \frac{f(t)}{t\sqrt{t^2+1}}$  .....  0  1  2

- 10)b)  $f$  bijective de  $\mathbb{R}_+^*$  dans  $\mathbb{R}_+^*$  ;  $f^{-1} = \text{sh}$  .....  0  1  2  3

- 10)c) Justification cdv .....  0  1  
 $I = 2 \int \frac{u}{\text{sh} u}$  .....  0  1

- 10)d)  $I = 4J$  .....  0  1  
 $N_1(f) = \pi/\sqrt{2}$  .....  0  1  
 $\frac{N_1(f)}{N_2(f)} = \sqrt{\pi}$  .....  0  1
- 

- 11)a)  $h \rightarrow_0 \alpha$  .....  0  1  
 $g \rightarrow_0 0$  .....  0  1

- 11)b)  $f'(t) - \sqrt{t}g'(t) = h(t)/2$  .....  0  1  
11)c)  $\sqrt{t}g'(t) \rightarrow_0 \alpha/2$  .....  0  1

- $gg' \rightarrow_0 \alpha^2/2$  .....  0  1  
11)d)  $\int (f')^2 = g^2/2 + \int (\sqrt{t}g')^2 + \frac{1}{4} \int h^2$  .....  0  1  2  
justification des intégrabilités .....  0  1  
12)a)  $E_2 \subset E_1$  .....  0  1  2  
13)b)  $\sin \in E_1$  .....  0  1  2  
 $\sin \notin E_2$  .....  0  1  2  3  
..... .....  0  1  
..... .....  0  1  
..... .....  0  1



Nom : \_\_\_\_\_

## DS 2

Soin) .....  0  1  2  3

1)a) IPP :  $\int_2^x \frac{1}{\ln t} dt = \frac{x}{\ln x} + c_0 + \int_2^x g_0$  ;  $c_0 = -\frac{2}{\ln 2}$  ;  $g_0(t) = \frac{1}{(\ln t)^2}$   0  1  2

1)b)  $R_0 = o_\infty(\int_2^x \frac{1}{\ln t} dt)$  car  $\int_2^x \frac{1}{\ln t} dt$  diverge .....  0  1

et  $\frac{1}{(\ln t)^2} = o(\frac{1}{\ln t})$  .....  0  1

et  $1/\ln$  positive .....  0  1

1)c)  $R_0 \sim_\infty \frac{x}{\ln x}$  .....  0  1

car  $\int \frac{1}{\ln t} - R_0 \sim \int \frac{1}{\ln t}$  .....  0  1

et  $c_0 = o(\frac{x}{\ln x})$  .....  0  1

2)a)  $c_n = -2 \sum_{k=0}^n \frac{k!}{(\ln 2)^{k+1}}$  et  $g_n(t) = \frac{(n+1)!}{(\ln t)^{n+2}}$  .....  0  1  2  3

2)b))  $R_{n+1} = o(R_n)$  car  $1/\ln^{n+2} \geq 0$  et  $1/\ln^{n+3} = o_\infty(1/\ln^{n+2})$  .....  0  1

et car  $1/\ln^{n+2}$  non intégrable en  $\infty$  .....  0  1

2)c)  $R_n \sim (n+1)! \frac{x}{(\ln x)^{n+2}}$  .....  0  1  2

2)d)  $\int_2^x \frac{1}{\ln t} = \sum_{k=0}^n \frac{k!x}{(\ln x)^{k+1}} + o_{x \rightarrow +\infty}(\frac{x}{(\ln x)^{n+1}})$  .....  0  1

1)  $\arctan \in E_1$  car s'annule en 0 et  $C^1$  .....  0  1

et  $(\frac{\arctan t}{t})^2$  cpm .....  0  1

et  $(\frac{\arctan t}{t})^2$  intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1

et  $(\frac{\arctan t}{t})^2$  intégrable sur  $[1, +\infty[$  .....  0  1

2)  $H_u : t \mapsto \frac{1}{(t^2+1)(t^2+u)}$  intégrable sur  $[0, \infty[$  car continue sur  $[0, \infty[$  .....  0  1

et  $\sim_\infty 1/t^4$  donc intégrable sur  $[1, \infty[$  .....  0  1

$f' = \frac{1}{1+t^2}$  donc (avec  $u=1$ )  $f \in E_2$  .....  0  1

3)a)  $\varphi(u) \rightarrow \varphi(1)$  en  $1^+$  car  $t \mapsto H_u(t)$  cpm sur  $[0, \infty[$  .....  0  1

et  $H_u(t) \rightarrow H_1(t)$  .....  0  1

majoration indépendante de  $u$  par  $H_1(t)$  ou  $\frac{1}{1+t^2}$  .....  0  1

penser aux valeurs absolues (ou fonction positive) .....  0  1

intégrabilité du majorant .....  0  1

3)b)  $\frac{1}{(T+1)(T+u^2)} = \frac{1}{u^2-1} (\frac{1}{T+1} - \frac{1}{T+u^2})$  .....  0  1

3)c)  $\varphi(x) = \frac{\pi}{2x(x+1)}$  pour  $x \neq 1$  bien simplifiée .....  0  1

pas simplifiée .....  0  1

3)d)  $N_2(f)^2 = \lim_{1+} \varphi$ , citer 3.a .....  0  1

$N_2(f) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$  .....  0  1

4)  $G_x : t \mapsto \frac{\arctan(xt)}{t(t^2+1)}$  intégrable sur  $]0, \infty[$  car cpm .....  0  1

et  $\sim_0 x$  donc intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1

et  $O_\infty(1/t^3)$  sur  $[1, +\infty[$  .....  0  1

équivalent en  $\infty$  faux quand  $x=0$  .....  0  1

5)a)  $x \neq 0$  ;  $\theta'(x) = \frac{1}{x^2} \varphi(\frac{1}{x})$  ou  $x\varphi(x)$  .....  0  1

$\theta'(x) = \frac{\pi}{2(x+1)}$  .....  0  1

$\theta'(0) = \frac{\pi}{2}$  .....  0  1

5)b) TFA .....  0  1

$\theta(x) = \frac{\pi}{2} \ln(1+x) + C$  .....  0  1

$C = 0$  .....  0  1

5)c)  $N_1^2(f) = 2\theta(1)$  par IPP .....  0  1  2  3

5)d)  $N_1(f) = \sqrt{\pi \ln(2)}$  .....  0  1

$\frac{N_1(f)}{N_2(f)} = 2\sqrt{\ln(2)}$  .....  0  1

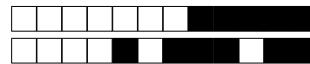
6)  $f'(t) = \frac{1+\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}}{t+\sqrt{t^2+1}}$  .....  0  1

$f'(t) = 1/(\sqrt{t^2+1})$  .....  0  1

$f \in E_1$  car  $f \in C^1([0, +\infty[)$  .....  0  1

et car  $f(0)=0$  .....  0  1

et car  $\int f'^2$  cv,  $N_2(f) = \sqrt{\pi/2}$  .....  0  1



- 7)  $f(t) \sim_0 t$  .....  0  1  
 $f(t) \sim_\infty \ln t$  .....  0  1  2

8)  $f \in E_1$  car  $t \mapsto (\frac{f(t)}{t})^2 \sim_0 1$  intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1  
et  $\sim_\infty \frac{\ln^2 t}{t^2}$  intégrable sur  $[1, +\infty[$  .....  0  1

9)a)  $-\ln t/(1-t^2)$  intégrable sur  $]0, 1[$  car cpm .....  0  1  
et  $\sim_0 -\ln t = 0(1/\sqrt{t})$  intégrable sur  $]0, \frac{1}{2}]$  .....  0  1  
et  $\sim_1 -(t-1)/(1-t^2) = 1/(t+1) \sim_1 1/2$  intégrable sur  $[\frac{1}{2}, 1[$  .....  0  1

9)b)  $-t^{2k} \ln t$  intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1  
 $\int = \frac{1}{(2k+1)^2}$  .....  0  1  2

9)c)  $J = \sum_0^\infty \int$  car  $\sum \int |.|$  converge .....  0  1  
et  $\sum -t^{2k} \ln t = -\frac{\ln t}{1-t^2}$  .....  0  1  
rappel des autres hypothèses .....  0  1

9)d)  $J = \pi^2/8$  .....  0  1  
justification .....  0  1

10)a)  $I = 2 \int \frac{f(t)}{t\sqrt{t^2+1}}$  .....  0  1  2

10)b)  $f$  bijective de  $\mathbb{R}_+^*$  dans  $\mathbb{R}_+^*$  ;  $f^{-1} = \text{sh}$  .....  0  1  2  3

10)c) Justification cdv .....  0  1  
 $I = 2 \int \frac{u}{\text{sh} u}$  .....  0  1

10)d)  $I = 4J$  .....  0  1  
 $N_1(f) = \pi/\sqrt{2}$  .....  0  1  
 $\frac{N_1(f)}{N_2(f)} = \sqrt{\pi}$  .....  0  1

---

11)a)  $h \rightarrow_0 \alpha$  .....  0  1  
 $g \rightarrow_0 0$  .....  0  1

11)b)  $f'(t) - \sqrt{t}g'(t) = h(t)/2$  .....  0  1

11)c)  $\sqrt{t}g'(t) \rightarrow_0 \alpha/2$  .....  0  1

- $gg' \rightarrow_0 \alpha^2/2$  .....  0  1  
11)d)  $\int (f')^2 = g^2/2 + \int (\sqrt{t}g')^2 + \frac{1}{4} \int h^2$  .....  0  1  2  
justification des intégrabilités .....  0  1  
12)a)  $E_2 \subset E_1$  .....  0  1  2  
13)b)  $\sin \in E_1$  .....  0  1  2  
 $\sin \notin E_2$  .....  0  1  2  3  
..... .....  0  1  
..... .....  0  1  
..... .....  0  1



Nom : \_\_\_\_\_

## DS 2

Soin) .....  0  1  2  3

1)a) IPP :  $\int_2^x \frac{1}{\ln t} dt = \frac{x}{\ln x} + c_0 + \int_2^x g_0$  ;  $c_0 = -\frac{2}{\ln 2}$  ;  $g_0(t) = \frac{1}{(\ln t)^2}$   0  1  2

1)b)  $R_0 = o_\infty(\int_2^x \frac{1}{\ln t} dt)$  car  $\int_2^x \frac{1}{\ln t} dt$  diverge .....  0  1

et  $\frac{1}{(\ln t)^2} = o(\frac{1}{\ln t})$  .....  0  1

et  $1/\ln$  positive .....  0  1

1)c)  $R_0 \sim_\infty \frac{x}{\ln x}$  .....  0  1

car  $\int \frac{1}{\ln t} - R_0 \sim \int \frac{1}{\ln t}$  .....  0  1

et  $c_0 = o(\frac{x}{\ln x})$  .....  0  1

2)a)  $c_n = -2 \sum_0^n \frac{k!}{(\ln 2)^{k+1}}$  et  $g_n(t) = \frac{(n+1)!}{(\ln t)^{n+2}}$  .....  0  1  2  3

2)b))  $R_{n+1} = o(R_n)$  car  $1/\ln^{n+2} \geq 0$  et  $1/\ln^{n+3} = o_\infty(1/\ln^{n+2})$  .....  0  1

et car  $1/\ln^{n+2}$  non intégrable en  $\infty$  .....  0  1

2)c)  $R_n \sim (n+1)! \frac{x}{(\ln x)^{n+2}}$  .....  0  1  2

2)d)  $\int_2^x \frac{1}{\ln t} = \sum_{k=0}^n \frac{k!x}{(\ln x)^{k+1}} + o_{x \rightarrow +\infty}(\frac{x}{(\ln x)^{n+1}})$  .....  0  1

1)  $\arctan \in E_1$  car s'annule en 0 et  $C^1$  .....  0  1

et  $(\frac{\arctan t}{t})^2$  cpm .....  0  1

et  $(\frac{\arctan t}{t})^2$  intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1

et  $(\frac{\arctan t}{t})^2$  intégrable sur  $[1, +\infty[$  .....  0  1

2)  $H_u : t \mapsto \frac{1}{(t^2+1)(t^2+u)}$  intégrable sur  $[0, \infty[$  car continue sur  $[0, \infty[$  .....  0  1

et  $\sim_\infty 1/t^4$  donc intégrable sur  $[1, \infty[$  .....  0  1

$f' = \frac{1}{1+t^2}$  donc (avec  $u=1$ )  $f \in E_2$  .....  0  1

3)a)  $\varphi(u) \rightarrow \varphi(1)$  en  $1^+$  car  $t \mapsto H_u(t)$  cpm sur  $[0, \infty[$  .....  0  1

et  $H_u(t) \rightarrow H_1(t)$  .....  0  1

majoration indépendante de  $u$  par  $H_1(t)$  ou  $\frac{1}{1+t^2}$  .....  0  1

penser aux valeurs absolues (ou fonction positive) .....  0  1

intégrabilité du majorant .....  0  1

3)b)  $\frac{1}{(T+1)(T+u^2)} = \frac{1}{u^2-1} (\frac{1}{T+1} - \frac{1}{T+u^2})$  .....  0  1

3)c)  $\varphi(x) = \frac{\pi}{2x(x+1)}$  pour  $x \neq 1$  bien simplifiée .....  0  1

pas simplifiée .....  0  1

3)d)  $N_2(f)^2 = \lim_{1+} \varphi$ , citer 3.a .....  0  1

$N_2(f) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$  .....  0  1

4)  $G_x : t \mapsto \frac{\arctan(xt)}{t(t^2+1)}$  intégrable sur  $]0, \infty[$  car cpm .....  0  1

et  $\sim_0 x$  donc intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1

et  $O_\infty(1/t^3)$  sur  $[1, +\infty[$  .....  0  1

équivalent en  $\infty$  faux quand  $x=0$  .....  0  1

5)a)  $x \neq 0$  ;  $\theta'(x) = \frac{1}{x^2} \varphi(\frac{1}{x})$  ou  $x\varphi(x)$  .....  0  1

$\theta'(x) = \frac{\pi}{2(x+1)}$  .....  0  1

$\theta'(0) = \frac{\pi}{2}$  .....  0  1

5)b) TFA .....  0  1

$\theta(x) = \frac{\pi}{2} \ln(1+x) + C$  .....  0  1

$C = 0$  .....  0  1

5)c)  $N_1^2(f) = 2\theta(1)$  par IPP .....  0  1  2  3

5)d)  $N_1(f) = \sqrt{\pi \ln(2)}$  .....  0  1

$\frac{N_1(f)}{N_2(f)} = 2\sqrt{\ln(2)}$  .....  0  1

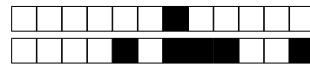
6)  $f'(t) = \frac{1+\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}}{t+\sqrt{t^2+1}}$  .....  0  1

$f'(t) = 1/(\sqrt{t^2+1})$  .....  0  1

$f \in E_1$  car  $f \in C^1([0, +\infty[)$  .....  0  1

et car  $f(0)=0$  .....  0  1

et car  $\int f'^2$  cv,  $N_2(f) = \sqrt{\pi/2}$  .....  0  1



- 7)  $f(t) \sim_0 t$  .....  0  1  
 $f(t) \sim_\infty \ln t$  .....  0  1  2

- 8)  $f \in E_1$  car  $t \mapsto (\frac{f(t)}{t})^2 \sim_0 1$  intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1  
et  $\sim_\infty \frac{\ln^2 t}{t^2}$  intégrable sur  $[1, +\infty[$  .....  0  1

- 9)a)  $-\ln t/(1-t^2)$  intégrable sur  $]0, 1[$  car cpm .....  0  1  
et  $\sim_0 -\ln t = 0(1/\sqrt{t})$  intégrable sur  $]0, \frac{1}{2}]$  .....  0  1  
et  $\sim_1 -(t-1)/(1-t^2) = 1/(t+1) \sim_1 1/2$  intégrable sur  $[\frac{1}{2}, 1[$  .....  0  1

- 9)b)  $-t^{2k} \ln t$  intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1  
 $\int = \frac{1}{(2k+1)^2}$  .....  0  1  2

- 9)c)  $J = \sum_0^\infty \int$  car  $\sum \int |.|$  converge .....  0  1  
et  $\sum -t^{2k} \ln t = -\frac{\ln t}{1-t^2}$  .....  0  1  
rappel des autres hypothèses .....  0  1

- 9)d)  $J = \pi^2/8$  .....  0  1  
justification .....  0  1

- 10)a)  $I = 2 \int \frac{f(t)}{t\sqrt{t^2+1}}$  .....  0  1  2

- 10)b)  $f$  bijective de  $\mathbb{R}_+^*$  dans  $\mathbb{R}_+^*$  ;  $f^{-1} = \text{sh}$  .....  0  1  2  3

- 10)c) Justification cdv .....  0  1  
 $I = 2 \int \frac{u}{\text{sh} u}$  .....  0  1

- 10)d)  $I = 4J$  .....  0  1  
 $N_1(f) = \pi/\sqrt{2}$  .....  0  1  
 $\frac{N_1(f)}{N_2(f)} = \sqrt{\pi}$  .....  0  1
- 

- 11)a)  $h \rightarrow_0 \alpha$  .....  0  1  
 $g \rightarrow_0 0$  .....  0  1

- 11)b)  $f'(t) - \sqrt{t}g'(t) = h(t)/2$  .....  0  1  
11)c)  $\sqrt{t}g'(t) \rightarrow_0 \alpha/2$  .....  0  1

- $gg' \rightarrow_0 \alpha^2/2$  .....  0  1  
11)d)  $\int (f')^2 = g^2/2 + \int (\sqrt{t}g')^2 + \frac{1}{4} \int h^2$  .....  0  1  2  
justification des intégrabilités .....  0  1  
12)a)  $E_2 \subset E_1$  .....  0  1  2  
13)b)  $\sin \in E_1$  .....  0  1  2  
 $\sin \notin E_2$  .....  0  1  2  3  
..... .....  0  1  
..... .....  0  1  
..... .....  0  1



Nom : \_\_\_\_\_

## DS 2

Soin) .....  0  1  2  3

1)a) IPP :  $\int_2^x \frac{1}{\ln t} dt = \frac{x}{\ln x} + c_0 + \int_2^x g_0 ; c_0 = -\frac{2}{\ln 2} ; g_0(t) = \frac{1}{(\ln t)^2}$   0  1  2

1)b)  $R_0 = o_\infty(\int_2^x \frac{1}{\ln t} dt)$  car  $\int_2^x \frac{1}{\ln t} dt$  diverge .....  0  1

et  $\frac{1}{(\ln t)^2} = o(\frac{1}{\ln t})$  .....  0  1

et  $1/\ln$  positive .....  0  1

1)c)  $R_0 \sim_\infty \frac{x}{\ln x}$  .....  0  1

car  $\int \frac{1}{\ln t} - R_0 \sim \int \frac{1}{\ln t}$  .....  0  1

et  $c_0 = o(\frac{x}{\ln x})$  .....  0  1

2)a)  $c_n = -2 \sum_{k=0}^n \frac{k!}{(\ln 2)^{k+1}}$  et  $g_n(t) = \frac{(n+1)!}{(\ln t)^{n+2}}$  .....  0  1  2  3

2)b))  $R_{n+1} = o(R_n)$  car  $1/\ln^{n+2} \geq 0$  et  $1/\ln^{n+3} = o_\infty(1/\ln^{n+2})$  .....  0  1

et car  $1/\ln^{n+2}$  non intégrable en  $\infty$  .....  0  1

2)c)  $R_n \sim (n+1)! \frac{x}{(\ln x)^{n+2}}$  .....  0  1  2

2)d)  $\int_2^x \frac{1}{\ln t} = \sum_{k=0}^n \frac{k!x}{(\ln x)^{k+1}} + o_{x \rightarrow +\infty}(\frac{x}{(\ln x)^{n+1}})$  .....  0  1

1)  $\arctan \in E_1$  car s'annule en 0 et  $C^1$  .....  0  1

et  $(\frac{\arctan t}{t})^2$  cpm .....  0  1

et  $(\frac{\arctan t}{t})^2$  intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1

et  $(\frac{\arctan t}{t})^2$  intégrable sur  $[1, +\infty[$  .....  0  1

2)  $H_u : t \mapsto \frac{1}{(t^2+1)(t^2+u)}$  intégrable sur  $[0, \infty[$  car continue sur  $[0, \infty[$  .....  0  1

et  $\sim_\infty 1/t^4$  donc intégrable sur  $[1, \infty[$  .....  0  1

$f' = \frac{1}{1+t^2}$  donc (avec  $u=1$ )  $f \in E_2$  .....  0  1

3)a)  $\varphi(u) \rightarrow \varphi(1)$  en  $1^+$  car  $t \mapsto H_u(t)$  cpm sur  $[0, \infty[$  .....  0  1

et  $H_u(t) \rightarrow H_1(t)$  .....  0  1

majoration indépendante de  $u$  par  $H_1(t)$  ou  $\frac{1}{1+t^2}$  .....  0  1

penser aux valeurs absolues (ou fonction positive) .....  0  1

intégrabilité du majorant .....  0  1

3)b)  $\frac{1}{(T+1)(T+u^2)} = \frac{1}{u^2-1} (\frac{1}{T+1} - \frac{1}{T+u^2})$  .....  0  1

3)c)  $\varphi(x) = \frac{\pi}{2x(x+1)}$  pour  $x \neq 1$  bien simplifiée .....  0  1

pas simplifiée .....  0  1

3)d)  $N_2(f)^2 = \lim_{1+} \varphi$ , citer 3.a .....  0  1

$N_2(f) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$  .....  0  1

4)  $G_x : t \mapsto \frac{\arctan(xt)}{t(t^2+1)}$  intégrable sur  $]0, \infty[$  car cpm .....  0  1

et  $\sim_0 x$  donc intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1

et  $O_\infty(1/t^3)$  sur  $[1, +\infty[$  .....  0  1

équivalent en  $\infty$  faux quand  $x=0$  .....  0  1

5)a)  $x \neq 0 ; \theta'(x) = \frac{1}{x^2} \varphi(\frac{1}{x})$  ou  $x\varphi(x)$  .....  0  1

$\theta'(x) = \frac{\pi}{2(x+1)}$  .....  0  1

$\theta'(0) = \frac{\pi}{2}$  .....  0  1

5)b) TFA .....  0  1

$\theta(x) = \frac{\pi}{2} \ln(1+x) + C$  .....  0  1

$C=0$  .....  0  1

5)c)  $N_1^2(f) = 2\theta(1)$  par IPP .....  0  1  2  3

5)d)  $N_1(f) = \sqrt{\pi \ln(2)}$  .....  0  1

$\frac{N_1(f)}{N_2(f)} = 2\sqrt{\ln(2)}$  .....  0  1

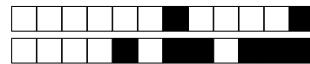
6)  $f'(t) = \frac{1+\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}}{t+\sqrt{t^2+1}}$  .....  0  1

$f'(t) = 1/(\sqrt{t^2+1})$  .....  0  1

$f \in E_1$  car  $f \in C^1([0, +\infty[)$  .....  0  1

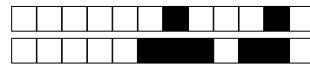
et car  $f(0)=0$  .....  0  1

et car  $\int f'^2$  cv,  $N_2(f) = \sqrt{\pi/2}$  .....  0  1



- 7)  $f(t) \sim_0 t$  .....  0  1  
 $f(t) \sim_\infty \ln t$  .....  0  1  2
- 8)  $f \in E_1$  car  $t \mapsto (\frac{f(t)}{t})^2 \sim_0 1$  intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1  
et  $\sim_\infty \frac{\ln^2 t}{t^2}$  intégrable sur  $[1, +\infty[$  .....  0  1
- 9)a)  $-\ln t/(1-t^2)$  intégrable sur  $]0, 1[$  car cpm .....  0  1  
et  $\sim_0 -\ln t = 0(1/\sqrt{t})$  intégrable sur  $]0, \frac{1}{2}]$  .....  0  1  
et  $\sim_1 -(t-1)/(1-t^2) = 1/(t+1) \sim_1 1/2$  intégrable sur  $[\frac{1}{2}, 1[$  .....  0  1
- 9)b)  $-t^{2k} \ln t$  intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1  
 $\int = \frac{1}{(2k+1)^2}$  .....  0  1  2
- 9)c)  $J = \sum_0^\infty \int$  car  $\sum \int |.|$  converge .....  0  1  
et  $\sum -t^{2k} \ln t = -\frac{\ln t}{1-t^2}$  .....  0  1  
rappel des autres hypothèses .....  0  1
- 9)d)  $J = \pi^2/8$  .....  0  1  
justification .....  0  1
- 10)a)  $I = 2 \int \frac{f(t)}{t\sqrt{t^2+1}}$  .....  0  1  2
- 10)b)  $f$  bijective de  $\mathbb{R}_+^*$  dans  $\mathbb{R}_+^*$  ;  $f^{-1} = \text{sh}$  .....  0  1  2  3
- 10)c) Justification cdv .....  0  1  
 $I = 2 \int \frac{u}{\text{sh} u}$  .....  0  1
- 10)d)  $I = 4J$  .....  0  1  
 $N_1(f) = \pi/\sqrt{2}$  .....  0  1  
 $\frac{N_1(f)}{N_2(f)} = \sqrt{\pi}$  .....  0  1
- 
- 11)a)  $h \rightarrow_0 \alpha$  .....  0  1  
 $g \rightarrow_0 0$  .....  0  1
- 11)b)  $f'(t) - \sqrt{t}g'(t) = h(t)/2$  .....  0  1
- 11)c)  $\sqrt{t}g'(t) \rightarrow_0 \alpha/2$  .....  0  1

- $gg' \rightarrow_0 \alpha^2/2$  .....  0  1
- 11)d)  $\int(f')^2 = g^2/2 + \int(\sqrt{t}g')^2 + \frac{1}{4} \int h^2$  .....  0  1  2  
justification des intégrabilités .....  0  1
- 12)a)  $E_2 \subset E_1$  .....  0  1  2
- 13)b)  $\sin \in E_1$  .....  0  1  2  
 $\sin \notin E_2$  .....  0  1  2  3  
..... .....  0  1  
..... .....  0  1  
..... .....  0  1



Nom : \_\_\_\_\_

## DS 2

Soin) .....  0  1  2  3

1)a) IPP :  $\int_2^x \frac{1}{\ln t} dt = \frac{x}{\ln x} + c_0 + \int_2^x g_0$  ;  $c_0 = -\frac{2}{\ln 2}$  ;  $g_0(t) = \frac{1}{(\ln t)^2}$   0  1  2

1)b)  $R_0 = o_\infty(\int_2^x \frac{1}{\ln t} dt)$  car  $\int_2^x \frac{1}{\ln t} dt$  diverge .....  0  1

et  $\frac{1}{(\ln t)^2} = o(\frac{1}{\ln t})$  .....  0  1

et  $1/\ln$  positive .....  0  1

1)c)  $R_0 \sim_\infty \frac{x}{\ln x}$  .....  0  1

car  $\int \frac{1}{\ln t} - R_0 \sim \int \frac{1}{\ln t}$  .....  0  1

et  $c_0 = o(\frac{x}{\ln x})$  .....  0  1

2)a)  $c_n = -2 \sum_0^n \frac{k!}{(\ln 2)^{k+1}}$  et  $g_n(t) = \frac{(n+1)!}{(\ln t)^{n+2}}$  .....  0  1  2  3

2)b))  $R_{n+1} = o(R_n)$  car  $1/\ln^{n+2} \geq 0$  et  $1/\ln^{n+3} = o_\infty(1/\ln^{n+2})$  .....  0  1

et car  $1/\ln^{n+2}$  non intégrable en  $\infty$  .....  0  1

2)c)  $R_n \sim (n+1)! \frac{x}{(\ln x)^{n+2}}$  .....  0  1  2

2)d)  $\int_2^x \frac{1}{\ln t} = \sum_{k=0}^n \frac{k!x}{(\ln x)^{k+1}} + o_{x \rightarrow +\infty}(\frac{x}{(\ln x)^{n+1}})$  .....  0  1

1)  $\arctan \in E_1$  car s'annule en 0 et  $C^1$  .....  0  1

et  $(\frac{\arctan t}{t})^2$  cpm .....  0  1

et  $(\frac{\arctan t}{t})^2$  intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1

et  $(\frac{\arctan t}{t})^2$  intégrable sur  $[1, +\infty[$  .....  0  1

2)  $H_u : t \mapsto \frac{1}{(t^2+1)(t^2+u)}$  intégrable sur  $[0, \infty[$  car continue sur  $[0, \infty[$  .....  0  1

et  $\sim_\infty 1/t^4$  donc intégrable sur  $[1, \infty[$  .....  0  1

$f' = \frac{1}{1+t^2}$  donc (avec  $u=1$ )  $f \in E_2$  .....  0  1

3)a)  $\varphi(u) \rightarrow \varphi(1)$  en  $1^+$  car  $t \mapsto H_u(t)$  cpm sur  $[0, \infty[$  .....  0  1

et  $H_u(t) \rightarrow H_1(t)$  .....  0  1

majoration indépendante de  $u$  par  $H_1(t)$  ou  $\frac{1}{1+t^2}$  .....  0  1

penser aux valeurs absolues (ou fonction positive) .....  0  1

intégrabilité du majorant .....  0  1

3)b)  $\frac{1}{(T+1)(T+u^2)} = \frac{1}{u^2-1} (\frac{1}{T+1} - \frac{1}{T+u^2})$  .....  0  1

3)c)  $\varphi(x) = \frac{\pi}{2x(x+1)}$  pour  $x \neq 1$  bien simplifiée .....  0  1

pas simplifiée .....  0  1

3)d)  $N_2(f)^2 = \lim_{1+} \varphi$ , citer 3.a .....  0  1

$N_2(f) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$  .....  0  1

4)  $G_x : t \mapsto \frac{\arctan(xt)}{t(t^2+1)}$  intégrable sur  $]0, \infty[$  car cpm .....  0  1

et  $\sim_0 x$  donc intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1

et  $O_\infty(1/t^3)$  sur  $[1, +\infty[$  .....  0  1

équivalent en  $\infty$  faux quand  $x=0$  .....  0  1

5)a)  $x \neq 0$  ;  $\theta'(x) = \frac{1}{x^2} \varphi(\frac{1}{x})$  ou  $x\varphi(x)$  .....  0  1

$\theta'(x) = \frac{\pi}{2(x+1)}$  .....  0  1

$\theta'(0) = \frac{\pi}{2}$  .....  0  1

5)b) TFA .....  0  1

$\theta(x) = \frac{\pi}{2} \ln(1+x) + C$  .....  0  1

$C=0$  .....  0  1

5)c)  $N_1^2(f) = 2\theta(1)$  par IPP .....  0  1  2  3

5)d)  $N_1(f) = \sqrt{\pi \ln(2)}$  .....  0  1

$\frac{N_1(f)}{N_2(f)} = 2\sqrt{\ln(2)}$  .....  0  1

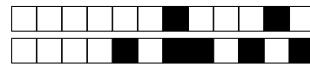
6)  $f'(t) = \frac{1+\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}}{t+\sqrt{t^2+1}}$  .....  0  1

$f'(t) = 1/(\sqrt{t^2+1})$  .....  0  1

$f \in E_1$  car  $f \in C^1([0, +\infty[)$  .....  0  1

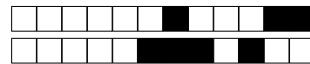
et car  $f(0)=0$  .....  0  1

et car  $\int f'^2$  cv,  $N_2(f) = \sqrt{\pi/2}$  .....  0  1



- 7)  $f(t) \sim_0 t$  .....  0  1  
 $f(t) \sim_\infty \ln t$  .....  0  1  2
- 8)  $f \in E_1$  car  $t \mapsto (\frac{f(t)}{t})^2 \sim_0 1$  intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1  
et  $\sim_\infty \frac{\ln^2 t}{t^2}$  intégrable sur  $[1, +\infty[$  .....  0  1
- 9)a)  $-\ln t/(1-t^2)$  intégrable sur  $]0, 1[$  car cpm .....  0  1  
et  $\sim_0 -\ln t = 0(1/\sqrt{t})$  intégrable sur  $]0, \frac{1}{2}]$  .....  0  1  
et  $\sim_1 -(t-1)/(1-t^2) = 1/(t+1) \sim_1 1/2$  intégrable sur  $[\frac{1}{2}, 1[$  .....  0  1
- 9)b)  $-t^{2k} \ln t$  intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1  
 $\int = \frac{1}{(2k+1)^2}$  .....  0  1  2
- 9)c)  $J = \sum_0^\infty \int$  car  $\sum \int |.|$  converge .....  0  1  
et  $\sum -t^{2k} \ln t = -\frac{\ln t}{1-t^2}$  .....  0  1  
rappel des autres hypothèses .....  0  1
- 9)d)  $J = \pi^2/8$  .....  0  1  
justification .....  0  1
- 10)a)  $I = 2 \int \frac{f(t)}{t\sqrt{t^2+1}}$  .....  0  1  2
- 10)b)  $f$  bijective de  $\mathbb{R}_+^*$  dans  $\mathbb{R}_+^*$  ;  $f^{-1} = \text{sh}$  .....  0  1  2  3
- 10)c) Justification cdv .....  0  1  
 $I = 2 \int \frac{u}{\text{sh} u}$  .....  0  1
- 10)d)  $I = 4J$  .....  0  1  
 $N_1(f) = \pi/\sqrt{2}$  .....  0  1  
 $\frac{N_1(f)}{N_2(f)} = \sqrt{\pi}$  .....  0  1
- 
- 11)a)  $h \rightarrow_0 \alpha$  .....  0  1  
 $g \rightarrow_0 0$  .....  0  1
- 11)b)  $f'(t) - \sqrt{t}g'(t) = h(t)/2$  .....  0  1
- 11)c)  $\sqrt{t}g'(t) \rightarrow_0 \alpha/2$  .....  0  1

- $gg' \rightarrow_0 \alpha^2/2$  .....  0  1
- 11)d)  $\int(f')^2 = g^2/2 + \int(\sqrt{t}g')^2 + \frac{1}{4} \int h^2$  .....  0  1  2  
justification des intégrabilités .....  0  1
- 12)a)  $E_2 \subset E_1$  .....  0  1  2
- 13)b)  $\sin \in E_1$  .....  0  1  2  
 $\sin \notin E_2$  .....  0  1  2  3  
..... .....  0  1  
..... .....  0  1  
..... .....  0  1



Nom : \_\_\_\_\_

## DS 2

Soin) .....  0  1  2  3

1)a) IPP :  $\int_2^x \frac{1}{\ln t} dt = \frac{x}{\ln x} + c_0 + \int_2^x g_0$  ;  $c_0 = -\frac{2}{\ln 2}$  ;  $g_0(t) = \frac{1}{(\ln t)^2}$   0  1  2

1)b)  $R_0 = o_\infty(\int_2^x \frac{1}{\ln t} dt)$  car  $\int_2^x \frac{1}{\ln t} dt$  diverge .....  0  1

et  $\frac{1}{(\ln t)^2} = o(\frac{1}{\ln t})$  .....  0  1

et  $1/\ln$  positive .....  0  1

1)c)  $R_0 \sim_\infty \frac{x}{\ln x}$  .....  0  1

car  $\int \frac{1}{\ln t} - R_0 \sim \int \frac{1}{\ln t}$  .....  0  1

et  $c_0 = o(\frac{x}{\ln x})$  .....  0  1

2)a)  $c_n = -2 \sum_{k=0}^n \frac{k!}{(\ln 2)^{k+1}}$  et  $g_n(t) = \frac{(n+1)!}{(\ln t)^{n+2}}$  .....  0  1  2  3

2)b))  $R_{n+1} = o(R_n)$  car  $1/\ln^{n+2} \geq 0$  et  $1/\ln^{n+3} = o_\infty(1/\ln^{n+2})$  .....  0  1

et car  $1/\ln^{n+2}$  non intégrable en  $\infty$  .....  0  1

2)c)  $R_n \sim (n+1)! \frac{x}{(\ln x)^{n+2}}$  .....  0  1  2

2)d)  $\int_2^x \frac{1}{\ln t} = \sum_{k=0}^n \frac{k!x}{(\ln x)^{k+1}} + o_{x \rightarrow +\infty}(\frac{x}{(\ln x)^{n+1}})$  .....  0  1

1)  $\arctan \in E_1$  car s'annule en 0 et  $C^1$  .....  0  1

et  $(\frac{\arctan t}{t})^2$  cpm .....  0  1

et  $(\frac{\arctan t}{t})^2$  intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1

et  $(\frac{\arctan t}{t})^2$  intégrable sur  $[1, +\infty[$  .....  0  1

2)  $H_u : t \mapsto \frac{1}{(t^2+1)(t^2+u)}$  intégrable sur  $[0, \infty[$  car continue sur  $[0, \infty[$  .....  0  1

et  $\sim_\infty 1/t^4$  donc intégrable sur  $[1, \infty[$  .....  0  1

$f' = \frac{1}{1+t^2}$  donc (avec  $u=1$ )  $f \in E_2$  .....  0  1

3)a)  $\varphi(u) \rightarrow \varphi(1)$  en  $1^+$  car  $t \mapsto H_u(t)$  cpm sur  $[0, \infty[$  .....  0  1

et  $H_u(t) \rightarrow H_1(t)$  .....  0  1

majoration indépendante de  $u$  par  $H_1(t)$  ou  $\frac{1}{1+t^2}$  .....  0  1

penser aux valeurs absolues (ou fonction positive) .....  0  1

intégrabilité du majorant .....  0  1

3)b)  $\frac{1}{(T+1)(T+u^2)} = \frac{1}{u^2-1} (\frac{1}{T+1} - \frac{1}{T+u^2})$  .....  0  1

3)c)  $\varphi(x) = \frac{\pi}{2x(x+1)}$  pour  $x \neq 1$  bien simplifiée .....  0  1

pas simplifiée .....  0  1

3)d)  $N_2(f)^2 = \lim_{1+} \varphi$ , citer 3.a .....  0  1

$N_2(f) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$  .....  0  1

4)  $G_x : t \mapsto \frac{\arctan(xt)}{t(t^2+1)}$  intégrable sur  $]0, \infty[$  car cpm .....  0  1

et  $\sim_0 x$  donc intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1

et  $O_\infty(1/t^3)$  sur  $[1, +\infty[$  .....  0  1

équivalent en  $\infty$  faux quand  $x=0$  .....  0  1

5)a)  $x \neq 0$  ;  $\theta'(x) = \frac{1}{x^2} \varphi(\frac{1}{x})$  ou  $x\varphi(x)$  .....  0  1

$\theta'(x) = \frac{\pi}{2(x+1)}$  .....  0  1

$\theta'(0) = \frac{\pi}{2}$  .....  0  1

5)b) TFA .....  0  1

$\theta(x) = \frac{\pi}{2} \ln(1+x) + C$  .....  0  1

$C = 0$  .....  0  1

5)c)  $N_1^2(f) = 2\theta(1)$  par IPP .....  0  1  2  3

5)d)  $N_1(f) = \sqrt{\pi \ln(2)}$  .....  0  1

$\frac{N_1(f)}{N_2(f)} = 2\sqrt{\ln(2)}$  .....  0  1

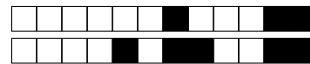
6)  $f'(t) = \frac{1+\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}}{t+\sqrt{t^2+1}}$  .....  0  1

$f'(t) = 1/(\sqrt{t^2+1})$  .....  0  1

$f \in E_1$  car  $f \in C^1([0, +\infty[)$  .....  0  1

et car  $f(0)=0$  .....  0  1

et car  $\int f'^2$  cv,  $N_2(f) = \sqrt{\pi/2}$  .....  0  1



- 7)  $f(t) \sim_0 t$  .....  0  1  
 $f(t) \sim_\infty \ln t$  .....  0  1  2
- 8)  $f \in E_1$  car  $t \mapsto (\frac{f(t)}{t})^2 \sim_0 1$  intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1  
et  $\sim_\infty \frac{\ln^2 t}{t^2}$  intégrable sur  $[1, +\infty[$  .....  0  1
- 9)a)  $-\ln t/(1-t^2)$  intégrable sur  $]0, 1[$  car cpm .....  0  1  
et  $\sim_0 -\ln t = 0(1/\sqrt{t})$  intégrable sur  $]0, \frac{1}{2}]$  .....  0  1  
et  $\sim_1 -(t-1)/(1-t^2) = 1/(t+1) \sim_1 1/2$  intégrable sur  $[\frac{1}{2}, 1[$  .....  0  1
- 9)b)  $-t^{2k} \ln t$  intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1  
 $\int = \frac{1}{(2k+1)^2}$  .....  0  1  2
- 9)c)  $J = \sum_0^\infty \int$  car  $\sum \int |.|$  converge .....  0  1  
et  $\sum -t^{2k} \ln t = -\frac{\ln t}{1-t^2}$  .....  0  1  
rappel des autres hypothèses .....  0  1
- 9)d)  $J = \pi^2/8$  .....  0  1  
justification .....  0  1
- 10)a)  $I = 2 \int \frac{f(t)}{t\sqrt{t^2+1}}$  .....  0  1  2
- 10)b)  $f$  bijective de  $\mathbb{R}_+^*$  dans  $\mathbb{R}_+^*$  ;  $f^{-1} = \text{sh}$  .....  0  1  2  3
- 10)c) Justification cdv .....  0  1  
 $I = 2 \int \frac{u}{\text{sh} u}$  .....  0  1
- 10)d)  $I = 4J$  .....  0  1  
 $N_1(f) = \pi/\sqrt{2}$  .....  0  1  
 $\frac{N_1(f)}{N_2(f)} = \sqrt{\pi}$  .....  0  1
- 
- 11)a)  $h \rightarrow_0 \alpha$  .....  0  1  
 $g \rightarrow_0 0$  .....  0  1
- 11)b)  $f'(t) - \sqrt{t}g'(t) = h(t)/2$  .....  0  1
- 11)c)  $\sqrt{t}g'(t) \rightarrow_0 \alpha/2$  .....  0  1

- $gg' \rightarrow_0 \alpha^2/2$  .....  0  1
- 11)d)  $\int(f')^2 = g^2/2 + \int(\sqrt{t}g')^2 + \frac{1}{4} \int h^2$  .....  0  1  2  
justification des intégrabilités .....  0  1
- 12)a)  $E_2 \subset E_1$  .....  0  1  2
- 13)b)  $\sin \in E_1$  .....  0  1  2  
 $\sin \notin E_2$  .....  0  1  2  3  
..... .....  0  1  
..... .....  0  1  
..... .....  0  1



Nom : \_\_\_\_\_

## DS 2

Soin) .....  0  1  2  3

1)a) IPP :  $\int_2^x \frac{1}{\ln t} dt = \frac{x}{\ln x} + c_0 + \int_2^x g_0$  ;  $c_0 = -\frac{2}{\ln 2}$  ;  $g_0(t) = \frac{1}{(\ln t)^2}$   0  1  2

1)b)  $R_0 = o_\infty(\int_2^x \frac{1}{\ln t} dt)$  car  $\int_2^x \frac{1}{\ln t} dt$  diverge .....  0  1

et  $\frac{1}{(\ln t)^2} = o(\frac{1}{\ln t})$  .....  0  1

et  $1/\ln$  positive .....  0  1

1)c)  $R_0 \sim_\infty \frac{x}{\ln x}$  .....  0  1

car  $\int \frac{1}{\ln t} - R_0 \sim \int \frac{1}{\ln t}$  .....  0  1

et  $c_0 = o(\frac{x}{\ln x})$  .....  0  1

2)a)  $c_n = -2 \sum_0^n \frac{k!}{(\ln 2)^{k+1}}$  et  $g_n(t) = \frac{(n+1)!}{(\ln t)^{n+2}}$  .....  0  1  2  3

2)b))  $R_{n+1} = o(R_n)$  car  $1/\ln^{n+2} \geq 0$  et  $1/\ln^{n+3} = o_\infty(1/\ln^{n+2})$  .....  0  1

et car  $1/\ln^{n+2}$  non intégrable en  $\infty$  .....  0  1

2)c)  $R_n \sim (n+1)! \frac{x}{(\ln x)^{n+2}}$  .....  0  1  2

2)d)  $\int_2^x \frac{1}{\ln t} = \sum_{k=0}^n \frac{k!x}{(\ln x)^{k+1}} + o_{x \rightarrow +\infty}(\frac{x}{(\ln x)^{n+1}})$  .....  0  1

1)  $\arctan \in E_1$  car s'annule en 0 et  $C^1$  .....  0  1

et  $(\frac{\arctan t}{t})^2$  cpm .....  0  1

et  $(\frac{\arctan t}{t})^2$  intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1

et  $(\frac{\arctan t}{t})^2$  intégrable sur  $[1, +\infty[$  .....  0  1

2)  $H_u : t \mapsto \frac{1}{(t^2+1)(t^2+u)}$  intégrable sur  $[0, \infty[$  car continue sur  $[0, \infty[$  .....  0  1

et  $\sim_\infty 1/t^4$  donc intégrable sur  $[1, \infty[$  .....  0  1

$f' = \frac{1}{1+t^2}$  donc (avec  $u=1$ )  $f \in E_2$  .....  0  1

3)a)  $\varphi(u) \rightarrow \varphi(1)$  en  $1^+$  car  $t \mapsto H_u(t)$  cpm sur  $[0, \infty[$  .....  0  1

et  $H_u(t) \rightarrow H_1(t)$  .....  0  1

majoration indépendante de  $u$  par  $H_1(t)$  ou  $\frac{1}{1+t^2}$  .....  0  1

penser aux valeurs absolues (ou fonction positive) .....  0  1

intégrabilité du majorant .....  0  1

3)b)  $\frac{1}{(T+1)(T+u^2)} = \frac{1}{u^2-1} (\frac{1}{T+1} - \frac{1}{T+u^2})$  .....  0  1

3)c)  $\varphi(x) = \frac{\pi}{2x(x+1)}$  pour  $x \neq 1$  bien simplifiée .....  0  1

pas simplifiée .....  0  1

3)d)  $N_2(f)^2 = \lim_{1+} \varphi$ , citer 3.a .....  0  1

$N_2(f) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$  .....  0  1

4)  $G_x : t \mapsto \frac{\arctan(xt)}{t(t^2+1)}$  intégrable sur  $]0, \infty[$  car cpm .....  0  1

et  $\sim_0 x$  donc intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1

et  $O_\infty(1/t^3)$  sur  $[1, +\infty[$  .....  0  1

équivalent en  $\infty$  faux quand  $x=0$  .....  0  1

5)a)  $x \neq 0$  ;  $\theta'(x) = \frac{1}{x^2} \varphi(\frac{1}{x})$  ou  $x\varphi(x)$  .....  0  1

$\theta'(x) = \frac{\pi}{2(x+1)}$  .....  0  1

$\theta'(0) = \frac{\pi}{2}$  .....  0  1

5)b) TFA .....  0  1

$\theta(x) = \frac{\pi}{2} \ln(1+x) + C$  .....  0  1

$C=0$  .....  0  1

5)c)  $N_1^2(f) = 2\theta(1)$  par IPP .....  0  1  2  3

5)d)  $N_1(f) = \sqrt{\pi \ln(2)}$  .....  0  1

$\frac{N_1(f)}{N_2(f)} = 2\sqrt{\ln(2)}$  .....  0  1

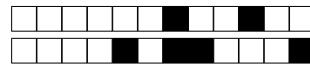
6)  $f'(t) = \frac{1+\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}}{t+\sqrt{t^2+1}}$  .....  0  1

$f'(t) = 1/(\sqrt{t^2+1})$  .....  0  1

$f \in E_1$  car  $f \in C^1([0, +\infty[)$  .....  0  1

et car  $f(0)=0$  .....  0  1

et car  $\int f'^2$  cv,  $N_2(f) = \sqrt{\pi/2}$  .....  0  1



- 7)  $f(t) \sim_0 t$  .....  0  1  
 $f(t) \sim_\infty \ln t$  .....  0  1  2

8)  $f \in E_1$  car  $t \mapsto (\frac{f(t)}{t})^2 \sim_0 1$  intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1  
et  $\sim_\infty \frac{\ln^2 t}{t^2}$  intégrable sur  $[1, +\infty[$  .....  0  1

- 9)a)  $-\ln t/(1-t^2)$  intégrable sur  $]0, 1[$  car cpm .....  0  1  
et  $\sim_0 -\ln t = 0(1/\sqrt{t})$  intégrable sur  $]0, \frac{1}{2}]$  .....  0  1  
et  $\sim_1 -(t-1)/(1-t^2) = 1/(t+1) \sim_1 1/2$  intégrable sur  $[\frac{1}{2}, 1[$  .....  0  1

- 9)b)  $-t^{2k} \ln t$  intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1  
 $\int = \frac{1}{(2k+1)^2}$  .....  0  1  2

- 9)c)  $J = \sum_0^\infty \int$  car  $\sum \int |.|$  converge .....  0  1  
et  $\sum -t^{2k} \ln t = -\frac{\ln t}{1-t^2}$  .....  0  1  
rappel des autres hypothèses .....  0  1

- 9)d)  $J = \pi^2/8$  .....  0  1  
justification .....  0  1

10)a)  $I = 2 \int \frac{f(t)}{t\sqrt{t^2+1}}$  .....  0  1  2

10)b)  $f$  bijective de  $\mathbb{R}_+^*$  dans  $\mathbb{R}_+^*$  ;  $f^{-1} = \text{sh}$  .....  0  1  2  3

10)c) Justification cdv .....  0  1  
 $I = 2 \int \frac{u}{\text{sh} u}$  .....  0  1

10)d)  $I = 4J$  .....  0  1  
 $N_1(f) = \pi/\sqrt{2}$  .....  0  1  
 $\frac{N_1(f)}{N_2(f)} = \sqrt{\pi}$  .....  0  1

---

11)a)  $h \rightarrow_0 \alpha$  .....  0  1  
 $g \rightarrow_0 0$  .....  0  1

11)b)  $f'(t) - \sqrt{t}g'(t) = h(t)/2$  .....  0  1

11)c)  $\sqrt{t}g'(t) \rightarrow_0 \alpha/2$  .....  0  1

- $gg' \rightarrow_0 \alpha^2/2$  .....  0  1  
11)d)  $\int (f')^2 = g^2/2 + \int (\sqrt{t}g')^2 + \frac{1}{4} \int h^2$  .....  0  1  2  
justification des intégrabilités .....  0  1  
12)a)  $E_2 \subset E_1$  .....  0  1  2  
13)b)  $\sin \in E_1$  .....  0  1  2  
 $\sin \notin E_2$  .....  0  1  2  3  
..... .....  0  1  
..... .....  0  1  
..... .....  0  1



Nom : \_\_\_\_\_

## DS 2

Soin) .....  0  1  2  3

1)a) IPP :  $\int_2^x \frac{1}{\ln t} dt = \frac{x}{\ln x} + c_0 + \int_2^x g_0$  ;  $c_0 = -\frac{2}{\ln 2}$  ;  $g_0(t) = \frac{1}{(\ln t)^2}$   0  1  2

1)b)  $R_0 = o_\infty(\int_2^x \frac{1}{\ln t} dt)$  car  $\int_2^x \frac{1}{\ln t} dt$  diverge .....  0  1

et  $\frac{1}{(\ln t)^2} = o(\frac{1}{\ln t})$  .....  0  1

et  $1/\ln$  positive .....  0  1

1)c)  $R_0 \sim_\infty \frac{x}{\ln x}$  .....  0  1

car  $\int \frac{1}{\ln t} - R_0 \sim \int \frac{1}{\ln t}$  .....  0  1

et  $c_0 = o(\frac{x}{\ln x})$  .....  0  1

2)a)  $c_n = -2 \sum_{k=0}^n \frac{k!}{(\ln 2)^{k+1}}$  et  $g_n(t) = \frac{(n+1)!}{(\ln t)^{n+2}}$  .....  0  1  2  3

2)b))  $R_{n+1} = o(R_n)$  car  $1/\ln^{n+2} \geq 0$  et  $1/\ln^{n+3} = o_\infty(1/\ln^{n+2})$  .....  0  1

et car  $1/\ln^{n+2}$  non intégrable en  $\infty$  .....  0  1

2)c)  $R_n \sim (n+1)! \frac{x}{(\ln x)^{n+2}}$  .....  0  1  2

2)d)  $\int_2^x \frac{1}{\ln t} = \sum_{k=0}^n \frac{k!x}{(\ln x)^{k+1}} + o_{x \rightarrow +\infty}(\frac{x}{(\ln x)^{n+1}})$  .....  0  1

1)  $\arctan \in E_1$  car s'annule en 0 et  $C^1$  .....  0  1

et  $(\frac{\arctan t}{t})^2$  cpm .....  0  1

et  $(\frac{\arctan t}{t})^2$  intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1

et  $(\frac{\arctan t}{t})^2$  intégrable sur  $[1, +\infty[$  .....  0  1

2)  $H_u : t \mapsto \frac{1}{(t^2+1)(t^2+u)}$  intégrable sur  $[0, \infty[$  car continue sur  $[0, \infty[$  .....  0  1

et  $\sim_\infty 1/t^4$  donc intégrable sur  $[1, \infty[$  .....  0  1

$f' = \frac{1}{1+t^2}$  donc (avec  $u=1$ )  $f \in E_2$  .....  0  1

3)a)  $\varphi(u) \rightarrow \varphi(1)$  en  $1^+$  car  $t \mapsto H_u(t)$  cpm sur  $[0, \infty[$  .....  0  1

et  $H_u(t) \rightarrow H_1(t)$  .....  0  1

majoration indépendante de  $u$  par  $H_1(t)$  ou  $\frac{1}{1+t^2}$  .....  0  1

penser aux valeurs absolues (ou fonction positive) .....  0  1

intégrabilité du majorant .....  0  1

3)b)  $\frac{1}{(T+1)(T+u^2)} = \frac{1}{u^2-1} (\frac{1}{T+1} - \frac{1}{T+u^2})$  .....  0  1

3)c)  $\varphi(x) = \frac{\pi}{2x(x+1)}$  pour  $x \neq 1$  bien simplifiée .....  0  1

pas simplifiée .....  0  1

3)d)  $N_2(f)^2 = \lim_{1+} \varphi$ , citer 3.a .....  0  1

$N_2(f) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$  .....  0  1

4)  $G_x : t \mapsto \frac{\arctan(xt)}{t(t^2+1)}$  intégrable sur  $]0, \infty[$  car cpm .....  0  1

et  $\sim_0 x$  donc intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1

et  $O_\infty(1/t^3)$  sur  $[1, +\infty[$  .....  0  1

équivalent en  $\infty$  faux quand  $x=0$  .....  0  1

5)a)  $x \neq 0$  ;  $\theta'(x) = \frac{1}{x^2} \varphi(\frac{1}{x})$  ou  $x\varphi(x)$  .....  0  1

$\theta'(x) = \frac{\pi}{2(x+1)}$  .....  0  1

$\theta'(0) = \frac{\pi}{2}$  .....  0  1

5)b) TFA .....  0  1

$\theta(x) = \frac{\pi}{2} \ln(1+x) + C$  .....  0  1

$C = 0$  .....  0  1

5)c)  $N_1^2(f) = 2\theta(1)$  par IPP .....  0  1  2  3

5)d)  $N_1(f) = \sqrt{\pi \ln(2)}$  .....  0  1

$\frac{N_1(f)}{N_2(f)} = 2\sqrt{\ln(2)}$  .....  0  1

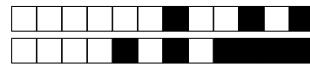
6)  $f'(t) = \frac{1+\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}}{t+\sqrt{t^2+1}}$  .....  0  1

$f'(t) = 1/(\sqrt{t^2+1})$  .....  0  1

$f \in E_1$  car  $f \in C^1([0, +\infty[)$  .....  0  1

et car  $f(0)=0$  .....  0  1

et car  $\int f'^2$  cv,  $N_2(f) = \sqrt{\pi/2}$  .....  0  1



- 7)  $f(t) \sim_0 t$  .....  0  1  
 $f(t) \sim_\infty \ln t$  .....  0  1  2

- 8)  $f \in E_1$  car  $t \mapsto (\frac{f(t)}{t})^2 \sim_0 1$  intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1  
et  $\sim_\infty \frac{\ln^2 t}{t^2}$  intégrable sur  $[1, +\infty[$  .....  0  1

- 9)a)  $-\ln t/(1-t^2)$  intégrable sur  $]0, 1[$  car cpm .....  0  1  
et  $\sim_0 -\ln t = 0(1/\sqrt{t})$  intégrable sur  $]0, \frac{1}{2}]$  .....  0  1  
et  $\sim_1 -(t-1)/(1-t^2) = 1/(t+1) \sim_1 1/2$  intégrable sur  $[\frac{1}{2}, 1[$  .....  0  1

- 9)b)  $-t^{2k} \ln t$  intégrable sur  $]0, 1]$  .....  0  1  
 $\int = \frac{1}{(2k+1)^2}$  .....  0  1  2

- 9)c)  $J = \sum_0^\infty \int$  car  $\sum \int |.|$  converge .....  0  1  
et  $\sum -t^{2k} \ln t = -\frac{\ln t}{1-t^2}$  .....  0  1  
rappel des autres hypothèses .....  0  1

- 9)d)  $J = \pi^2/8$  .....  0  1  
justification .....  0  1

- 10)a)  $I = 2 \int \frac{f(t)}{t\sqrt{t^2+1}}$  .....  0  1  2

- 10)b)  $f$  bijective de  $\mathbb{R}_+^*$  dans  $\mathbb{R}_+^*$  ;  $f^{-1} = \text{sh}$  .....  0  1  2  3

- 10)c) Justification cdv .....  0  1  
 $I = 2 \int \frac{u}{\text{sh} u}$  .....  0  1

- 10)d)  $I = 4J$  .....  0  1  
 $N_1(f) = \pi/\sqrt{2}$  .....  0  1  
 $\frac{N_1(f)}{N_2(f)} = \sqrt{\pi}$  .....  0  1
- 

- 11)a)  $h \rightarrow_0 \alpha$  .....  0  1  
 $g \rightarrow_0 0$  .....  0  1

- 11)b)  $f'(t) - \sqrt{t}g'(t) = h(t)/2$  .....  0  1

- 11)c)  $\sqrt{t}g'(t) \rightarrow_0 \alpha/2$  .....  0  1

- $gg' \rightarrow_0 \alpha^2/2$  .....  0  1  
11)d)  $\int (f')^2 = g^2/2 + \int (\sqrt{t}g')^2 + \frac{1}{4} \int h^2$  .....  0  1  2  
justification des intégrabilités .....  0  1  
12)a)  $E_2 \subset E_1$  .....  0  1  2  
13)b)  $\sin \in E_1$  .....  0  1  2  
 $\sin \notin E_2$  .....  0  1  2  3  
..... .....  0  1  
..... .....  0  1  
..... .....  0  1