Rappels sur le déterminant

Dans ce chapitre $\mathbf{K}$ désigne le corps $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

1. Introduction

Commençons par motiver les définitions qui vont suivre. Pour cela, on considère l'espace vectoriel $E = \mathbf{R}^n$ (on peut penser au cas où $n = 2$ ou $n = 3$). On veut définir une fonction $\varphi : E^n \longrightarrow \mathbf{R}$ tel que si $(u_1, \dots, u_n)$ sont des vecteurs de E, $\varphi(u_1, \dots, u_n)$ mesure le volume du parallélépipède construit sur ces vecteurs.

Dans le cas où $n = 2$, on peut facilement se convaincre que φ doit vérifier :

- Si u, v, w sont trois vecteurs de $\mathbf{R}^2$, $\varphi(u + v, w) = \varphi(u, w) + \varphi(v, w)$ et $\varphi(w, u + v) = \varphi(w, u) + \varphi(w, v)$
- Soit u, v deux vecteurs de $\mathbf{R}^2$ et $\lambda \in \mathbf{R}$, $\varphi(\lambda u, v) = \lambda\varphi(u, v)$ et $\varphi(v, \lambda u) = \lambda\varphi(v, u)$

De même, il semble nécessaire d'imposer comme condition de pour $u \in E$, $\varphi(u, u) = 0$.

Nous verrons aussi plus loin que cet exemple se généralise au volume d'un parallélépipède dans $\mathbf{R}^3$.

2. Applications multilinéaires

2.1 Définitions

Dans ce paragraphe E et F sont deux espaces vectoriels sur $\mathbf{K}$.

Définition 2.1.1

Soit $p \in \mathbf{N}^\star$. On appelle application p-linéaire de E dans F une application f de E^p dans F telle que pour tout $(a_1, \dots, a_p)$ dans E^p et tout i dans $[\![1\,;\,p]\!]$, l'application :

$$f(a_1, \dots, a_{i-1}, \bullet, a_{i+1}, \dots, a_p) : \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_p) \end{array}$$

est linéaire.

Remarques :

1. On dit que f est linéaire par rapport à toutes ses coordonnées.
2. On s'intéressera principalement au cas des formes p-linéaires qui sont des applications p-linéaires de E dans $\mathbf{K}$. De même on s'intéressera principalement à $p = 2$ ou $p = \dim E$.

Terminologie :

1. L'ensemble des applications p-linéaires de E dans F se note $L_p(E,F)$.
2. Une application 1-linéaire est une application linéaire.
3. Une application 2-linéaire s'appelle une application bilinéaire.

Exemples :

1. Les applications linéaires sont les applications 1-linéaires.
2. Si $E = \mathbf{K}[X]$ et $f : E \times E \to E$ défini par $f(P,Q) = PQ$. L'application f est bilinéaire.
3. Le cas précédent fonctionne encore pour toute algèbre E : $\mathscr{L}(E), \mathscr{M}_n(\mathbf{K}), \mathscr{C}^p(I,\mathbf{R})$.
4. De manière plus générale, soit E une algèbre :
$$\begin{array}{ccc} E^p & \to & E \\ (x_1,\ldots,x_p) & \mapsto & x_1 \times \cdots \times x_p \end{array}$$
est p-lineaire.
5. Dans $E = \mathbf{R}^2$ (ou $\mathbf{R}^3$) le produit scalaire est une forme bilinéaire. On a dans $\mathbf{R}^2$
$$(x_1,x_2).(y_1,y_2) = x_1y_1 + x_2y_2.$$
6. Dans $\mathbf{R}^2$ le déterminant est une forme bilinéaire.
$$\mathrm{Det}((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1y_2 - x_2y_1.$$
7. Pour $E = \mathscr{C}^0([0,1],\mathbf{R})$, l'application $(f,g) \mapsto \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ est une forme bilinéaire.

2.2 Expression d'une application p-linéaire sur un espace vectoriel de dimension finie

On suppose que E est un espace vectoriel de dimension finie et on note $(e_1,\ldots,e_n)$ une base de E. On va voir que l'on peut décrire les formes multilinéaires comme les applications linéaires.

Commençons par étudier le cas des applications bilinéaires (qui est le plus courant).

Soit f une application bilinéaire sur E. Pour tous vecteurs u et v, on note
$$u = \sum_{1\leqslant i\leqslant n} x_ie_i \text{ et } v = \sum_{1\leqslant j\leqslant n} y_je_j.$$

On a alors
$$\begin{aligned} f(u,v) &= f\left(\sum_{1\leqslant i\leqslant n} x_ie_i, \sum_{1\leqslant j\leqslant n} y_je_j\right) \\ &= \sum_{1\leqslant i\leqslant n} x_i f\left(e_i, \sum_{1\leqslant j\leqslant n} y_je_j\right) \text{ par linéarité à gauche} \\ &= \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_iy_jf(e_i,e_j) \end{aligned}$$

On voit donc que f est uniquement déterminée par son action sur la base. Il suffit de connaitre $f(e_i,e_j)$ pour $(i,j) \in [\![1\,;\,n]\!]^2$ pour connaitre f.

Réciproquement, si on se donne u_{ij} des vecteurs de F, l'application
$$f : \left(\sum_i x_ie_i, \sum_j y_je_j\right) \mapsto \sum_{i,j} x_iy_ju_{ij}$$
est bilineaire.

Théorème 2.2.2

Avec les notations précédentes, si f est une forme p-linéaire de E dans F. Pour tous vecteurs

$$u_1 = \sum_i x_{i1} e_i, \dots, u_p = \sum_i x_{ip} e_i,$$

on a

$$f(u_1, \dots, u_p) = \sum_{1 \leqslant i_1, \dots, i_p \leqslant n} x_{i_1 1} \cdots x_{i_p p} f(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}).$$

Réciproquement pour tout famille $(u_I)_{I \in [\![1\,;n]\!]^p}$, l'application

$$f : \left(\sum_i x_{i1} e_i, \cdots, \sum_i x_{ip} e_i \right) \mapsto \sum_{1 \leqslant i_1, \dots, i_p \leqslant n} x_{i_1 1} \cdots x_{i_p p} u_{i_1, \dots, i_p}$$

est une application p-linéaire.

2.3 Applications symétriques, antisymétriques et alternées

Définition 2.3.3

Soit f une forme p-linéaire de E dans F.

1. *Elle est dite symétrique si pour tout $(u_1, \dots, u_p)$ de E^p et tout $1 \leqslant i < j \leqslant p$,*

$$f(u_1, \dots, u_p) = f(u_1, \dots, u_{i-1}, u_j, u_{i+1}, \dots, u_{j-1}, u_i, u_{j+1}, \dots, u_p).$$

   On ne change pas la valeur de f en inversant la place de deux vecteurs.

2. *Elle est dite antisymétrique si si pour tout $(u_1, \dots, u_p)$ de E^p et tout $1 \leqslant i < j \leqslant p$,*

$$f(u_1, \dots, u_p) = -f(u_1, \dots, u_{i-1}, u_j, u_{i+1}, \dots, u_{j-1}, u_i, u_{j+1}, \dots, u_p).$$

   On obtient l'opposée de la valeur initiale en inversant la place de deux vecteurs.

Exemples :

1. Le produit scalaire de $\mathbf{R}^2$ (ou $\mathbf{R}^3$) est une forme bilinéaire symétrique.
2. Le déterminant de $\mathbf{R}^2$ est une forme bilinéaire antisymétrique.
3. La forme bilinéaire $((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \mapsto x_1 y_2$ n'est ni symétrique ni antisymétrique.

Proposition 2.3.4

Soit f une forme p-linéaire et $\sigma \in \mathfrak{S}_p$. Pour tout $(u_1, \dots, u_p) \in E^p$ on a :

1. Si f est symétrique, $f(u_{\sigma(1)}, \dots, u_{\sigma(p)}) = f(u_1, \dots, u_p)$.
2. Si f est antisymétrique, $f(u_{\sigma(1)}, \dots, u_{\sigma(p)}) = \varepsilon(\sigma) f(u_1, \dots, u_p)$.

Démonstration : Il suffit de décomposer σ en produit de transpositions. □

Définition 2.3.5

Soit f une application p-linéaire de E dans F, elle est dite alternée si

$$\forall (u_1, \dots, u_p) \in E^p, (\exists (i,j) \in [\![1 ; p]\!]^2, u_i = u_j) \Rightarrow f(u_1, \dots, u_p) = 0.$$

Exemple : Le produit scalaire n'est pas alterné alors que le déterminant l'est.

Théorème 2.3.6

Toute application p-linéaire alternée est antisymétrique.

Démonstration : Soit f une application p-linéaire alternée. Soit $(u_1, \dots, u_p) \in E^p$ et $1 \leqslant i < j \leqslant p$. On a

$$\begin{aligned} 0 &= f(u_1, \dots, u_{i-1}, u_i + u_j, u_{i+1}, \dots, u_{j-1}, u_i + u_j, u_{j+1}, \dots, u_p) \\ &= f(u_1, \dots, u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, \dots, u_{j-1}, u_i, u_{j+1}, \dots, u_p) + f(u_1, \dots, u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, \dots, u_{j-1}, u_j, u_{j+1}, \dots, u_p) \\ &\quad + f(u_1, \dots, u_{i-1}, u_j, u_{i+1}, \dots, u_{j-1}, u_i, u_{j+1}, \dots, u_p) + f(u_1, \dots, u_{i-1}, u_j, u_{i+1}, \dots, u_{j-1}, u_j, u_{j+1}, \dots, u_p) \\ &= f(u_1, \dots, u_p) + f(u_1, \dots, u_{i-1}, u_j, u_{i+1}, \dots, u_{j-1}, u_i, u_{j+1}, \dots, u_p) \end{aligned}$$

Donc f est antisymétrique. □

Remarque : La réciproque est encore vraie en effet, si f est alternée alors en échangeant les deux termes égaux on trouve :

$$f(u_1, \dots, u_{i-1}, a, u_{i+1}, \dots, u_{j-1}, a, u_{j+1}, \dots, u_p) = -f(u_1, \dots, u_{i-1}, a, u_{i+1}, \dots, u_{j-1}, a, u_{j+1}, \dots, u_p).$$

d'où

$$2f(u_1, \dots, u_{i-1}, a, u_{i+1}, \dots, u_{j-1}, a, u_{j+1}, \dots, u_p) = 0.$$

Proposition 2.3.7

Soit f une forme p-linéaire alternée et $(u_1, \dots, u_p)$ une famille liée. On a $f(u_1, \dots, u_p) = 0$.

Démonstration : La famille est supposée liée, il existe donc un vecteur de la famille qui s'exprime en fonction des autres. Par antisymétrie, on peut supposer que c'est u_1 (sinon, si c'est u_{i_0} on échange u_1 et u_{i_0} ce qui multiplie la valeur calculée par -1). On a alors $u_1 = \displaystyle\sum_{k=2}^{p} \lambda_k u_k$ et, par linéarité :

$$f(u_1, \dots, u_p) = \sum_{k=2}^{p} \lambda_k f(u_k, u_2, \dots, u_p) = 0.$$

□

3. Déterminant

On se fixe un espace vectoriel E de dimension n.

3.1 Formes n-linéaires sur un espace vectoriel de dimension n

Théorème 3.1.8

L'ensemble des formes n-linéaires alternées de E est un espace vectoriel de dimension 1. On le note $\Lambda^{*n}E$.

Démonstration : Remarquons pour commencer que l'ensemble des formes n-linéaires alternées est inclus dans l'espace vectoriel $L_p(E, \mathbf{K})$. De plus si φ_1 et φ_2 sont deux formes n-linéaires alternées, il est clair pour tout couple $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbf{K}^2$ de scalaires, $\lambda_1\varphi_1+\lambda_2\varphi_2$ est encore une forme n-linéaire alternée. On en déduit que $\Lambda^{*n}E$ est bien un sous-esapce vectoriel de $L_p(E, \mathbf{K})$.

Il reste à montrer qu'il est de dimension 1.

— Commençons à le prouver dans le cas où $n = 2$. Considérons une base (e_1, e_2) de E. On sait que pour déterminer f il suffit de connaitre $u_{11} = f(e_1, e_1), u_{12} = f(e_1, e_2), u_{21} = f(e_2, e_1)$ et $u_{22} = f(e_2, e_2)$. Comme f est alternée, $u_{11} = u_{22} = 0$. De plus, elle est antisymétrique donc $u_{21} = u_{12}$.

  On en déduit finalement que pour tout $u = x_1e_1 + x_2e_2$ et $v = y_1e_1 + y_2e_2$ alors

$$f(u, v) = x_1y_1f(e_1, e_1) + x_1y_2f(e_1, e_2) + x_2y_1f(e_2, e_1) + x_2y_2f(e_2, e_2) = (x_1y_2 - x_2y_1)f(e_1, e_2)$$

  Si on pose f_0 **la** 2-forme linéaire alternée telle que $u_{12} = 1$ (et donc $u_{21} = -1$), c'est-à-dire que

$$f_0 : (u, v) = x_1y_2 - x_2y_1$$

  alors pour toute 2-forme linéaire alternée f on a

$$f = f(e_1, e_2)f_0$$

  L'ensemble des formes 2-linéaires alternées de E est bien un espace vectoriel de dimension 1 engendré par f_0.

— Étudions maintenant le cas général. Soit f une forme n-linéaire alternée. On considère encore une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E. Pour tout $I = (i_1, \dots, i_n) \in [\![1\,;\, n]\!]^n$ on pose $u_I = f(e_{i_1}, \dots, e_{i_n})$. Là encore, on a vu que f était uniquement déterminée par la famille $(u_I)_{I\in[\![1\,;\,n]\!]^n}$.

  Si on considère un n-uplet $I = (i_1, \dots, i_n)$ tel qu'un même élément apparait deux fois, la forme linéaire f étant alternée, $u_I = f(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}) = 0$.

  On est donc ramené à ne considérer que des n-uplets $I = (i_1, \dots, i_n)$ où tous les éléments apparaissant dans le n-uplet sont deux à deux distincts. On peut les voir comme des permutations σ de $[\![1\,;\, n]\!]$ en posant

$$I = (\sigma(1), \dots, \sigma(n))$$

  En utilisant que f est antisymétrique, on obtient alors que

$$u_I = f(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma)f(e_1, \dots, e_n)$$

  En conclusion, si on se fixe $f(e_1, \dots, e_n)$, la forme n-linéaire alternée f est entièrement déterminée. Dit autrement, si on pose encore f_0 l'unique forme n-linéaire alternée telle que $f_0(e_1, \dots, e_n) = 1$ alors pour toute forme n-linéaire alternée f,

$$f = f(e_1, \dots, e_n)f_0$$

  L'ensemble des formes n-linéaires alternées de E est bien un espace vectoriel de dimension 1 engendré par f_0.

□

Corollaire 3.1.9

Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et f_0 l'unique forme n-linéaire telle que $f_0(e_1, \dots, e_n) = 1$. Soit $(u_1, \dots, u_n)$ dont les coordonnées dans $\mathscr{B}$ sont

$$\forall j \in [\![1\,;\, n]\!]\; u_j = \sum_{i=1}^{n} x_{ij}e_i.$$

On a

$$f(u_1, \dots, u_n) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)x_{\sigma(1),1} \cdots x_{\sigma(n),n}.$$

3.2 Déterminant d'une famille de vecteurs

Définition 3.2.10

Soit $\mathscr{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Il existe une unique forme n-linéaire f_0 telle que $f_0(e_1, \ldots, e_n) = 1$. On l'appelle le determinant relatif à la base $\mathscr{E}$ et on la note $\det_{\mathscr{E}}$ (ou $\det$ s'il n'y a pas de confusion)

Remarques :

1. L'existence et l'unicité découle du fait que l'ensemble des formes n-linéaires sur E est un espace de dimension 1.
2. Si on change $\mathscr{E}$, on change $\det_{\mathscr{E}}$. Cela sera précisé par la proposition suivante.

Exemple : Calculons le déterminant dans $\mathbf{R}^3$ par rapport à la base canonique :

$$\det((x, y, z), (x', y', z'), (x'', y'', z'')) = xy'z'' - xz'y'' - yx'z'' + yz'x'' + zx'y'' - zy'x''.$$

Proposition 3.2.11

Soit $\mathscr{E}$ et $\mathscr{E}'$ deux bases de E. On a

$$\det_{\mathscr{E}} = \det_{\mathscr{E}}(\mathscr{E}') \det_{\mathscr{E}'}.$$

Démonstration : On a vu que $\det_{\mathscr{E}}$ et $\det_{\mathscr{E}'}$ sont deux éléments non nuls de $\Delta^{*n}E$ qui est de dimension 1. Ils sont donc colinéaires et le coefficient de colinéarité n'est pas nul. Il suffit ensuite d'appliquer en $\mathscr{E}'$ pour trouver le coefficient.

□

Proposition 3.2.12

Soit $\mathscr{B}$ une base et $(u_1, \ldots, u_n) \in E^n$,

$$(u_1, \ldots, u_n) \text{ est une base de } E \iff \det_{\mathscr{B}}(u_1, \ldots, u_n) \neq 0.$$

Démonstration :

- $\boxed{\Rightarrow}$ On suppose que $(u_1, \ldots, u_n)$ est une base. Le scalaire $\det_{\mathscr{B}}(u_1, \ldots, u_n)$ est celui qui est défini ci-dessus, il est non nul.
- $\boxed{\Leftarrow}$ Procédons par contraposée. Si la famille $(u_1, \ldots, u_n)$ n'est pas une base, elle est liée. Il existe donc $i \in [\![1 ; n]\!]$ tel que u_i soit une combinaison linéaire des u_j avec $j \neq i$. On note $u_i = \sum_{j \neq i} \lambda_j u_j$. On en déduit que

$$\begin{aligned}
\det_{\mathscr{B}}(u_1, \ldots, u_n) &= \sum_{j \neq i} \lambda_j \det_{\mathscr{B}}(u_1, \ldots, u_{i-1}, u_j, u_{i+1}, u_n) \\
&= 0 \text{ car } \det_{\mathscr{B}} \text{ est alternée}
\end{aligned}$$

□

Remarque : Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $u_1, \ldots, u_n$ des vecteurs de E, on peut donc voir $\det_{\mathscr{B}}(u_1, \ldots, u_n)$ comme le volume du parallélépipède dont les cotés sont représentés par les vecteurs $u_1, \ldots, u_n$. La base $\mathscr{B}$ servant alors de volume de référence car $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}) = 1$.

3.3 Déterminant d'un endomorphisme

Proposition 3.3.13

Soit f un endomorphisme de E. Il existe un unique scalaire λ tel que pour toute base $\mathscr{B}$ et toute famille $(u_1, \ldots, u_n) \in E^n$,

$$\det_{\mathscr{B}}(f(u_1), \ldots, f(u_n)) = \lambda \det_{\mathscr{B}}(u_1, \ldots, u_n).$$

Démonstration :

— Unicité : Soit λ_1 et λ_2 deux scalaires vérifiant la relation. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E alors

$$\det_{\mathscr{B}}(f(e_1), \ldots, f(e_n)) = \lambda_1 \text{ et } \det_{\mathscr{B}}(f(e_1), \ldots, f(e_n)) = \lambda_2 \text{ car } \det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}) = 1.$$

Donc $\lambda_1 = \lambda_2$.

— Existence : On se fixe une base $\mathscr{B}$. On considère l'application :

$$\Phi : (u_1, \ldots, u_n) \mapsto \det_{\mathscr{B}}(f(u_1), \ldots, f(u_n)).$$

On montre aisément que c'est un élément de $\Lambda^{*n}E$. Il existe donc λ tel que $\Phi = \lambda \det_{\mathscr{B}}$.
Maintenant si $\mathscr{B}'$ est une autre base de E alors il existe α un scalaire non nul (qui est égal à $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')$) tel que $\det_{\mathscr{B}'} = \alpha \det_{\mathscr{B}}$.
On en déduit que pour tout $(u_1, \ldots, u_n) \in E^n$,

$$\det_{\mathscr{B}'}(f(u_1), \ldots, f(u_n)) = \alpha \det_{\mathscr{B}}(f(u_1), \ldots, f(u_n)) = \alpha\lambda \det_{\mathscr{B}}(u_1, \ldots, u_n) = \lambda \det_{\mathscr{B}'}(u_1, \ldots, u_n).$$

□

Définition 3.3.14

Soit f un endomorphisme de E. On appelle déterminant de f et on note $\mathrm{Det}(f)$ le scalaire défini à la proposition précédente.

Exemples :

1. Si $f = \mathrm{Id}$, $\mathrm{Det}(\mathrm{Id}) = 1$. De plus, $\mathrm{Det}(\lambda\mathrm{Id}) = \lambda^n$.
2. Si s est la symétrie par rapport à G et parallèlement à F où $F \oplus G = E$. On prend une base adaptée c'est à dire une base $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ telle que $(e_1, \ldots, e_p)$ est une base de F et $(e_{p+1}, \ldots, e_n)$ une base de G. On a alors

$$\det_{\mathscr{B}}(s(e_1), \ldots, s(e_n)) = \det_{\mathscr{B}}(-e_1, \ldots, -e_p, e_{p+1}, \ldots, e_n) = (-1)^p \det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}).$$

Donc $\mathrm{Det}(s) = (-1)^p$.

ATTENTION

La notion de déterminant d'une famille de vecteurs est relative à une base. Par contre, la notion de déterminant d'un endomorphisme est absolue. Cela ne dépend pas du choix d'une base.

Proposition 3.3.15

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$:

$$f \in \mathsf{GL}(E) \iff \mathsf{Det}(f) \neq 0.$$

Démonstration :

— $\boxed{\Rightarrow}$: On suppose que f est un automorphisme. On sait alors que l'image d'une base est une base. Soit $\mathscr{E}$ une base et $\mathscr{E}'$ son image par f. On a

$$\det_{\mathscr{E}}(\mathscr{E}') = \text{Det}(f)\det_{\mathscr{E}}(\mathscr{E}) = \text{Det}(f)$$

Or $\mathscr{E}'$ est une base donc $\det_{\mathscr{E}}(\mathscr{E}') \neq 0$.

— $\boxed{\Leftarrow}$: Si $\text{Det}(f) \neq 0$. On procède de même. On voit que l'image par f d'une base est une base donc f est un automorphisme.

□

Proposition 3.3.16

Soit f et g deux endomorphisme, $\text{Det}(f \circ g) = \text{Det}(f) \times \text{Det}(g)$

Remarque : Si on revient sur l'interprétation des déterminants comme des volumes, on voit que le déterminant d'un endomorphisme mesure la dilation des parallélépipèdes par l'application de l'application f.

4. Déterminant d'une matrice

4.1 Définition

Définition 4.1.17

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ une matrice carrée. On appelle déterminant de A et on note $\text{Det}(A)$ le déterminant des vecteurs colonnes de la matrice dans le déterminant relatif à la base canonique de $\mathbf{K}^n$.

Notation : Si

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ on note } \text{Det}(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Exemple : Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ alors $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$.

Proposition 4.1.18

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$. On a

$$\text{Det}(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n}$$

Démonstration : C'est la formule démontrée précédemment. □

Remarque : Avec les notations précédentes, on a aussi

$$\text{Det}(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{n,\sigma(n)}$$

Il suffit en effet de voir que comme $\sigma \mapsto \sigma^{-1}$ est une bijection de $\mathfrak{S}_n$ dans $\mathfrak{S}_n$ et que pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\sigma^{-1})$,

$$\text{Det}(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma^{-1}) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma^{-1}(i),i} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma^{-1}) \prod_{j=1}^{n} a_{\sigma^{-1}(\sigma(j))),\sigma(j)} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} a_{j,\sigma(j)}$$

Exemple : Dans le cas $n = 3$ on trouve

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + dhc + gbf - gec - dbi - ahf.$$

Il suffit d'utiliser les trois permutations paires Id, $(1, 2, 3)$ et $(1, 3, 2)$ et les trois permutations impaires $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(2, 3)$.
Cela s'appelle la règle de Sarrus.

ATTENTION

Cela ne se généralise pas au cas du déterminant de taille 4 ou plus.

La notion de déterminant d'une matrice est liée aux notions vues précédemment. Précisément,

Proposition 4.1.19

1. Si $\mathscr{B}$ est une base de E et $(u_1, \ldots, u_n)$ une famille de vecteurs. Si $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u_1, \ldots, u_n)$ alors
$$\mathrm{Det}(M) = \det_{\mathscr{B}}(u_1, \ldots, u_n).$$
2. Si $f \in \mathscr{L}(E)$. Si $\mathscr{B}$ est une base de E et $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(f)$ alors
$$\mathrm{Det}(f) = \mathrm{Det}(M).$$

Démonstration :

1. La encore, il suffit d'utiliser la formule.
2. D'après ce qui précède on sait que $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ si on note $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$. D'où
$$\mathrm{Det}(M) = \det_{\mathscr{B}}(f(e_1), \ldots, f(e_n)) = \mathrm{Det}(f) \det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}) = \mathrm{Det}(f).$$

□

4.2 Propriétés et calculs

Théorème 4.2.20 (Propriétés du déterminant)

1) Soit $f \in \mathscr{L}(E)$, f est inversible si et seulement si $\mathrm{Det}(f) \neq 0$.

1.bis) Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, M est inversible si et seulement si $\mathrm{Det}(M) \neq 0$.

1.ter) Soit $(u_1, \ldots, u_n) \in E^n$, c'est une base si et seulement si $\mathrm{Det}_{\mathscr{B}}(u_1, \ldots, u_n) \neq 0$ où $\mathscr{B}$ est une base de E.

2) Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbf{K}$, $\mathrm{Det}(\lambda f) = \lambda^n \mathrm{Det}(f)$

2.bis) Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ et $\lambda \in \mathbf{K}$, $\mathrm{Det}(\lambda M) = \lambda^n \mathrm{Det}(M)$.

3) Soit $(f, g) \in \mathscr{L}(E)^2$, $\mathrm{Det}(f \circ g) = \mathrm{Det}(f)\mathrm{Det}(g)$.

3.bis) Soit $(M, N) \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})^2$, $\mathrm{Det}(MN) = \mathrm{Det}(M)\mathrm{Det}(N)$.

4) Si $f \in \mathrm{GL}(E)$, alors $\mathrm{Det}(f^{-1}) = \dfrac{1}{\mathrm{Det}(f)}$.

4.bis) Si $M \in \mathrm{GL}(\mathbf{K})$, alors $\mathrm{Det}(M^{-1}) = \dfrac{1}{\mathrm{Det}(M)}$.

ATTENTION

Le déterminant n'est pas linéaire

Démonstration : Les points 1 et 2 ont déjà été vus. Pour le point 3 il suffit de la faire pour les endomorphismes. On se donne une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E. Alors

$$\begin{aligned}
\mathrm{Det}(f \circ g) &= \det_{\mathscr{B}}(f(g(e_1), \dots, f(g(e_n)) \\
&= \mathrm{Det}(f) \det_{\mathscr{B}}(g(e_1), \dots, g(e_n)) \\
&= \mathrm{Det}(f)\mathrm{Det}(g) \det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}) \\
&= \mathrm{Det}(f)\mathrm{Det}(g).
\end{aligned}$$

Pour le 4, il suffit d'utiliser de plus que $\mathrm{Det}(\mathrm{Id}) = 1$. □

Proposition 4.2.21

Soit A une matrice,

$$\mathrm{Det}(A) = \mathrm{Det}(A^T).$$

Démonstration : On note $A = (a_{ij})$. On note $B = (b_{ij})$ la matrice A^T et donc $b_{ij} = a_{ji}$. On sait alors que

$$\mathrm{Det}(B) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) b_{\sigma(1),1} \cdots b_{\sigma(n),n}.$$

Or

$$b_{\sigma(1),1} \cdots b_{\sigma(n),n} = a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{n,\sigma(n)} = a_{\sigma^{-1}(1),1} \cdots a_{\sigma^{-1}(n),n}.$$

On en déduit que

$$\mathrm{Det}(B) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma^{-1}(1),1} \cdots a_{\sigma^{-1}(n),n} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma^{-1}) a_{\sigma^{-1}(1),1} \cdots a_{\sigma^{-1}(n),n} = \mathrm{Det}(A).$$

En effet l'application $\sigma \mapsto \sigma^{-1}$ est une bijection.

□

Remarque : On en déduit que le déterminant est aussi une forme n-linéaire alternée des lignes de la matrice.

Proposition 4.2.22

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de la forme

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & A' & & \vdots \\ & & & 0 \\ \hline * & \cdots & * & \alpha \end{array}\right).$$

On a $\mathrm{Det}(A) = \alpha \mathrm{Det}(A')$.

Démonstration : Il suffit de revenir à la formule

$$\mathrm{Det}(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n}.$$

On voit que les termes de la somme sont nuls si $\sigma(n) \neq n$. On peut donc restreindre la somme aux permutations de $[\![1\,;\,n-1]\!]$.
On trouve alors
$$\mathrm{Det}(A) = \alpha \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{n-1}} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n-1),n-1} = \alpha \mathrm{Det}(A').$$

□

Corollaire 4.2.23

Si A est une matrice triangulaire inférieure

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ * & \alpha_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ * & \cdots & * & \alpha_n \end{pmatrix}$$

Alors $\mathrm{Det}(A) = \prod_{i=1}^{n} \alpha_i$. De même si A est triangulaire supérieure.
En particulier, A est inversible si et seulement si $\forall i \in [\![1\,;\,n]\!], \alpha_i \neq 0$.

Démonstration : C'est une récurrence en utilisant la propriété ci-dessus.
On peut alors regarder, comme pour le pivot de Gauss, l'action des opérations élémentaires sur le déterminant d'une matrice.

Proposition 4.2.24

Soit A une matrice et B la matrice obtenue par une opération élémentaire on a
- Pour $C_i \leftrightarrow C_j$, $\mathrm{Det}(B) = -\mathrm{Det}(A)$.
- Pour $C_i \leftarrow \lambda C_i$, $\mathrm{Det}(B) = \lambda \mathrm{Det}(A)$.
- Pour $C_i \leftarrow C_i + C_j$, $\mathrm{Det}(B) = \mathrm{Det}(A)$.

On en déduit que l'on peut ajouter à une colonne un combinaison linéaire des autres colonnes sans modifier le déterminant. De plus, on peut faire les mêmes opérations sur les lignes.

Démonstration : Il suffit d'utiliser que les déterminant est une n-forme linéaire alternée. □

Exemple : Si on veut calculer $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ -1 & 7 & 2 \end{vmatrix}$. On peut utiliser la règle de Sarrus et on trouve $\mathrm{Det}(A) = 40$. Sinon on peut aussi voir que

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ -1 & 7 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & -5 \\ 0 & 10 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -5 \\ 10 & 5 \end{vmatrix} = 40$$

Exercice : Calculer $\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix}$

4.3 Développements suivant une ligne ou une colonne

Il existe une autre méthode pour calculer un déterminant.

Définition 4.3.25

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice et $(i, j) \in [\![1 ; n]\!]^2$.

- *On note A_{ij} la sous-matrice de A obtenue en supprimant la ligne i et la colonne j.*
- *On appelle mineur associé à a_{ij} le déterminant $\Delta_{ij} = Det(A_{ij})$.*
- *On appelle cofacteur associée à a_{ij} le terme $(-1)^{i+j}\Delta_{ij}$.*

Exemple : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Le mineur en $(1, 2)$ est $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 4$.

Proposition 4.3.26

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice.

1. Pour tout $j \in [\![1 ; n]\!]$,
$$\text{Det}(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \Delta_{ij} \quad \text{(Développement par rapport à une colonne)}$$
2. Pour tout $i \in [\![1 ; n]\!]$,
$$\text{Det}(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \Delta_{ij} \quad \text{(Développement par rapport à une ligne)}$$

Démonstration :

1. Notons $C_1, \ldots, C_n$ les n colonnes de la matrices et $C_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$. On a donc
$$\text{Det}(A) = \text{Det}(C_1, \cdots, C_n) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \text{Det}(C_1, \ldots, C_{j-1}, X_i, C_{j+1}, \ldots, C_n)$$
où X_i est la matrice colonne avec juste un 1 en position i.

Or

$$\mathrm{Det}(C_1,\dots,C_{j-1},X_i,C_{j+1},\dots,C_n)=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & 0 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & 0 & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n}\\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j-1} & 1 & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,n}\\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & 0 & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n}\\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & 0 & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Maintenant en échangeant $j-1$-fois de colonnes et $i-1$ fois des lignes on peut amener le 1 en haut à gauche (ou en bas à droite avec $n-j$ fois sur les colonnes et $n-i$ fois sur les lignes). On en déduit que

$$\mathrm{Det}(C_1,\dots,C_{j-1},X_i,C_{j+1},\dots,C_n)=(-1)^{i+j-2}\Delta_{ij}=(-1)^{i+j}\Delta_{ij}.$$

2. Il suffit de transposer

Exemple : Soit $a\in]-2,2[$ on pose

$$D_n(a)=\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & a & 1 & \ddots & \vdots\\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & a & 1\\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a \end{vmatrix}.$$

En développant par rapport à la première ligne on obtient

$$D_n(a)=aD_{n-1}(a)-\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & a & 1 & \ddots & \vdots\\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & a & 1\\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a \end{vmatrix}.$$

En développant par rapport à la première colonne on récupère

$$D_n(a)=aD_{n-1}(a)-D_{n-2}a.$$

De plus, $D_1(a)=a$ et $D_2(a)=a^2-1$. On étend en posant $D_0(a)=1$. On résout l'équation caractéristique $X^2-2aX+1=0$. Si on pose $a=2\cos(\theta)$ avec $\theta=\arccos(a/2)\in]0,\pi[$ on trouve $e^{\pm i\theta}$ comme solution d'où il existe (λ,μ) tels que

$$D_n(a)=\lambda\cos(n\theta)+\mu\sin(n\theta).$$

On en déduit que $\lambda=1$ et $\mu=\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$. Finalement

$$D_n(a)=\frac{\sin(\theta)\cos(n\theta)+\cos(\theta)\sin(n\theta)}{\sin\theta}=\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}.$$

4.4 Déterminants classiques

4.4.1 Déterminant de Vandermonde

Soit $a_0, \dots, a_n$ des scalaires on pose

$$V(a_0, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_n \\ a_0^2 & a_1^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_0^n & a_1^n & \cdots & a_n^n \end{vmatrix}.$$

Étudions les premières valeurs.

— Si $n = 1$, $V(a_0) = 1$.

— Si $n = 2$, $V(a_0, a_1) = a_1 - a_0$.

— Si $n = 3$, il est plus simple de particulariser une valeur. On a $V(a_0, a_1, x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_0 & a_1 & x \\ a_0^2 & a_1^2 & x^2 \end{vmatrix}$.

Si on développe par rapport à la dernière colonne

$$V(a_0, a_1, x) = x^2(a_1 - a_0) - x(a_1^2 - a_0^2) + a_0 a_1^2 - a_1 a_0^2 = (a_1 - a_0)(x^2 - x(a_1 + a_0) + a_1 a_0) = (a_1 - a_0)(x - a_1)(x - a_0).$$

On peut conjecturer que

$$V(a_0, \dots, a_n) = \prod_{0 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i).$$

On le démontre par récurrence

On suppose que l'on sait le démontrer pour n et on veut le démontrer pour n+1. Soit x, une inconnue, on considère $V(a_0, \dots, a_n, x)$. En le développant par rapport à la dernière colonne on voit que

$$V(a_0, \dots, a_n, x) = V(a_0, \dots, a_n) x^n + \cdots$$

C'est donc un polynôme de degré au plus n. De plus le coefficient dominant vaut $V(a_0, \dots, a_n)$.

— S'il existe i et j distincts tels que $a_i = a_j$ alors $V(a_0, \dots, a_n, x) = 0 = \prod_{0 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i) \times \prod_{k=0}^{n} (x - a_k)$.

— Si $a_i \neq a_j$ alors $V(a_0, \dots, a_n) \neq 0$. Le polynôme n'est donc pas nul. De plus on sait qu'il s'annule en $a_0, \dots, a_n$ et que son coefficient dominant est $V(a_0, \dots, a_n)$ d'où

$$V(a_0, \dots, , a_n, x) = \prod_{0 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i) \times \prod_{k=0}^{n} (x - a_k).$$

C'est ce que l'on voulait.

4.4.2 Déterminant triangulaire par blocs

Proposition 4.4.27

Soit M une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ pouvant s'écrire par blocs

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

avec $A \in \mathscr{M}_{n'}(\mathbf{K})$, $B \in \mathscr{M}_{n', n-n'}(\mathbf{K})$ et $D \in \mathscr{M}_{n-n'}(\mathbf{K})$. On a

$$\mathsf{Det}(M) = \mathsf{Det}(A)\mathsf{Det}(D)$$

Démonstration : Il y a plusieurs démonstration de cette proposition.

— La première consiste à reprendre la formule générale du déterminant :

$$\mathrm{Det}(M) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n}$$

Maintenant, pour tout $p > n'$ et $q \leqslant n'$, $a_{pq} = 0$. De ce fait, dans la somme ci-dessus on peut ne garder que les permutations σ qui laissent $[\![n'+1\,;\, n]\!]$ stable. De ce fait, $[\![1\,;\, n']\!]$ est aussi stable. Une telle permutation est donc donnée par une permutation σ_1 de $[\![1\,;\, n']\!]$ et une permutation σ_2 de $[\![n'+1\,;\, n]\!]$. On en déduit donc que

$$\mathrm{Det}(M) = \left(\sum_{\sigma_1 \in \mathfrak{S}_{n'}} a_{\sigma_1(1),1} \cdots a_{\sigma_1(n'),n'} \right) \times \left(\sum_{\sigma_2 \in S} a_{\sigma_2(n'+1),n'+1} \cdots a_{\sigma_2(n),n} \right) = \mathrm{Det}(A) \times \mathrm{Det}(D),$$

où S est l'ensemble des permutations de $[\![n'+1\,;\, n]\!]$.

— Une autre preuve consiste à écrire la matrice M comme un produit. On a

$$M = \left(\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & D \end{array} \right) \times \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & I \end{array} \right)$$

Maintenant en développant selon la dernière ligne $n - n'$ fois, on trouve que

$$\begin{vmatrix} A & B \\ 0 & I \end{vmatrix} = \mathrm{Det}(A)$$

De même en développant n' fois selon la première ligne, on a

$$\begin{vmatrix} I & 0 \\ 0 & D \end{vmatrix} = \mathrm{Det}(D)$$

Donc $\mathrm{Det}(M) = \mathrm{Det}(A)\mathrm{Det}(D)$.

□

Exercices :

1. Montrer que si

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

avec $A \in \mathscr{M}_{n'}(\mathbf{K})$, $B \in \mathscr{M}_{n',n-n'}(\mathbf{K})$, $C \in \mathscr{M}_{n-n',n'}(\mathbf{K})$ et $D \in \mathscr{M}_{n-n'}(\mathbf{K})$ avec D inversible et qui commute avec C alors

$$\mathrm{Det}(M) = \mathrm{Det}(AD - BC)$$

2. Trouver

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

telle que

$$\mathrm{Det}(M) \neq \mathrm{Det}(A)\mathrm{Det}(D) - \mathrm{Det}(B)\mathrm{Det}(C)$$

Corollaire 4.4.28

Soit M une matrice triangulaire supérieure par blocs. De la forme

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & \star & \cdots & \star \\ 0 & A_2 & \ddots & \star \\ 0 & 0 & \ddots & \star \\ 0 & \cdots & 0 & A_p \end{pmatrix}.$$

On a

$$\det(M) = \prod_{i=1}^{p} \mathrm{Det}(A_i).$$

5. Utilisation des déterminants

5.1 Comatrice

Définition 5.1.29

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$. On appelle comatrice de A et on note $\mathrm{Com}(A)$ la matrices des cofacteurs.

Exemple : Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

On a $\mathrm{Com}(A) = \begin{pmatrix} 8 & 1 & -13 \\ 4 & -4 & -1 \\ -6 & -3 & 3 \end{pmatrix}$. Calculons alors $\mathrm{Com}(A)^T.A$. On trouve $-18I$. Or $\mathrm{Det}(A) = -18$. On trouve donc $\mathrm{Com}(A)^T.A = \mathrm{Det}(A)I$.

Proposition 5.1.30

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$. On a $\mathrm{Com}(A)^T.A = \mathrm{Det}(A)I$ et $A^t\mathrm{Com}(A) = \mathrm{Det}(A)I$. En particulier, si A est inversible

$$A^{-1} = \frac{1}{\mathrm{Det}(A)}\mathrm{Com}(A)^T.$$

Démonstration : Notons comme précédemment $A = (a_{ij})$ et Δ_{ij} le mineur associé à a_{ij}. On note $b_{ij} = (-1)^{i+j}\Delta_{ji}$ les coefficients de $\mathrm{Com}(A)^T$.

— Pour la diagonale : Soit $i \in [\![1 ; n]\!]$ on a

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ji} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}\Delta_{ij} = \mathrm{Det}(A)(\text{Formule de developpement par rapport à la ligne } i)$$

— Hors de la diagonale : Soit $(i, j) \in [\![1 ; n]\!]^2$ avec $i \neq j$. On a

$$S = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = \sum_{k=1} a_{ik}(-1)^{i+k}\Delta_{jk}$$

On remarque alors que

$$S = \sum_{k=1} a_{ik}(-1)^{i+k}\Delta_{jk} = (-1)^{i+j}\sum_{k=1} a_{ik}(-1)^{j+k}\Delta_{jk}.$$

De plus, si on considère la matrice $A' = (a'_{ij})$ obtenue en remplaçant la ligne j de A par la ligne i de telle sorte que $a_{ik} = a'_{ik} = a'_{jk}$ on obtient

$$S = (-1)^{i+j}\sum_{k=1} a'_{jk}(-1)^{i+k}\Delta_{jk}.$$

C'est donc $\mathrm{Det}(A')$ qui est nul.

$\square$