On se fixe un réel strictement positif ε pour les questions 1 et 2.

1. (a) La suite (f_n) convergeant uniformément vers f, on sait que $(f_n - f)$ converge uniformément vers la fonction nulle. On en déduit qu'il existe N tel que pour tout $n \geqslant N$, $f_n - f$ soit bornée. De plus, la suite $(||f_n - f||_\infty)_{n \geqslant N}$ tend vers 0 donc, pour ε, il existe $N_1 \geqslant N$ tel que pour $n \geqslant N_1$, $||f_n - f||_\infty \leqslant \varepsilon$.

   (b) Soit n et p deux entiers supérieurs à N_1 :

$$||f_n - f_p||_\infty = ||(f_n - f) + (f - f_p)||_\infty \leqslant ||f_n - f||_\infty + ||f - f_p||_\infty \leqslant 2\varepsilon.$$

   De ce fait, pour tout $x \in A$, $|f_n(x) - f_p(x)| \leqslant ||f_n - f_p||_\infty \leqslant 2\varepsilon$. En faisant alors tendre x vers a (et en utilisant que $X \mapsto |X|$ est continue), on obtient $\boxed{|\ell_n - \ell_p| \leqslant 2\varepsilon}$.

   (c) On en déduit en appliquant ce qui précède à $n = N_1$ que pour tout $p \geqslant N_1$, $|\ell_p - \ell_{N_1}| \leqslant 2\varepsilon$. Cela implique que $(\ell_n)_{n \geqslant N_1}$ est bornée puisqu'elle est à valeurs dans $[\ell_{N_1} - 2\varepsilon, \ell_{N_1} + 2\varepsilon]$. De ce fait, la suite $(\ell_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est bornée.

   On peut donc appliquer le théorème de Bolzano-Weierstrass pour en déduire que l'on peut en extraire une sous-suite convergente de (ℓ_n).

On note $(\ell_{\varphi(n)})$ une suite extraite de (ℓ_n) convergente et on note α sa limite

2. (a) Par définition, $(\ell_{\varphi(k)})_{k \geqslant 0}$ tend vers α. Donc, il existe M tel que $k \geqslant M$ implique que $|\ell_{\varphi(k)} - \alpha| \leqslant \varepsilon$. Posons N_2 un entier supérieur à N_1 et à $\varphi(M)$.

   Soit $n \geqslant N_2$ tel que $n \in \varphi(\mathbf{N})$. Comme φ est strictement croissante, $n = \varphi(k)$ avec $k \geqslant M$ et donc

$$|\ell_n - \alpha| = |\ell_{\varphi(k)} - \alpha| \leqslant \varepsilon.$$

   (b) Soit $n \geqslant N_2$, il existe $p \in \varphi(\mathbf{N})$ tel que $p \geqslant N_2$ car $\varphi(\mathbf{N})$ n'est pas majorée. On en déduit que

$$|\ell_n - \alpha| = |(\ell_n - \ell_p) + (\ell_p - \alpha)| \leqslant |\ell_n - \ell_p| + |\ell_p - \alpha| \leqslant 2\varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon.$$

   (c) L'assertion prouvé ci dessus, signifie que $\boxed{(\ell_n) \text{ converge vers } \alpha}$ [1]

3. On veut maintenant montrer que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \alpha = \lim(\ell_n)$.

   C'est-à-dire :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in A, |x - a| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x) - \alpha| \leqslant \varepsilon.$$

   Soit donc $\varepsilon > 0$ (ici $\varepsilon > 0$ est générique). D'après la question 1.a) il existe un entier A_1 tel que pour $n \geqslant A_1$, $||f_n - f||_\infty \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$. De même, comme (ℓ_n) converge vers α, il existe un entier A_2 tel que pour $n \geqslant A_2$, $|\ell_n - \alpha| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$. Fixons un entier n_0 supérieur à A_1 et à A_2.

   Comme $\lim\limits_{x \to a} f_{n_0} = \ell_{n_0}$, il existe $\eta > 0$ tel que pour $x \in A$, $|x - a| \leqslant \eta \Rightarrow |f_{n_0}(x) - \ell_{n_0}| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$.

   Finalement, pour $x \in A$ tel que $|x - a| \leqslant \eta$,

$$|f(x) - \alpha| = |(f(x) - f_{n_0}(x)) + (f_{n_0}(x) - \ell_{n_0}) + (\ell_{n_0} - \alpha)| \leqslant ||f - f_{n_0}||_\infty + |f_{n_0}(x) - \ell_{n_0}| + |\ell_{n_0} - \alpha| \leqslant \varepsilon.$$

   On a bien montré que $\boxed{\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim(\ell_n).}$

1. On vient de montrer que la suite (ℓ_n) converge en n'utilisant que la propriété démontrée en 1.b) qui est que pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que pour n, p des entiers supérieurs ou égaux à N, $|\ell_n - \ell_p| \leqslant \varepsilon$. Une telle suite s'appelle une suite de Cauchy. On a donc montré que dans $\mathbf{R}$ toute suite de Cauchy converge ; on dit que $\mathbf{R}$ est *complet.*