On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -6 & 2 & 5 \\ -2 & 2 & 1 \\ -11 & 3 & 9 \end{pmatrix}$.

On note a l'endomorphisme canoniquement associé à A.

1. Déterminer les deux valeurs propres de A. On les notera $\lambda_1 < \lambda_2$

Corrigé

On sait que pour $\lambda \in \mathbf{R}$, λ est une valeur propre si et seulement si $\det(A - \lambda I_3) = 0$. Or

$$\begin{vmatrix} -6-\lambda & 2 & 5 \\ -2 & 2-\lambda & 1 \\ -11 & 3 & 9-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4\lambda) = -(\lambda-1)(\lambda-2)^2.$$

On en déduit que $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 2$.

2. Déterminer u_1 et u_2 tels que $E_{\lambda_1}(a) = \mathrm{Vect}(u_1)$ et $E_{\lambda_2}(a) = \mathrm{Vect}(u_2)$.

Corrigé

— Pour $\lambda_1 = 1$, on résout le système donné par la matrice

$$A - I = \begin{pmatrix} -7 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & 1 \\ -11 & 3 & 8 \end{pmatrix}.$$

Elle est visiblement de rang 2 et donc son noyau est de dimension 1. De plus le vecteur $u_1 = (1, 1, 1)$ est solution du système.

— Pour $\lambda_2 = 2$, on résout le système donné par la matrice

$$A - 2I = \begin{pmatrix} -8 & 2 & 5 \\ -2 & 0 & 1 \\ -11 & 3 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -8 & 2 & 5 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

On a fait les opérations $L_2 \leftarrow 4L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow 8L_3 - 11L_1$. Elle est donc de rang 2 et donc son noyau est de dimension 1. De plus le vecteur $u_2 = (1, -1, 2)$ est solution du système.

3. La matrice A est-elle diagonalisable ?

Corrigé

☐ Oui ☑ Non

4. Déterminer u_3 le vecteur de $\mathbb{R}^3$ dont la troisième composante est 1 et tel que $(a - 2\mathrm{id})(u_3) = (1, -1, 2)$ et donner la matrice de a dans la base (u_1, u_2, u_3).

Corrigé

Pour déterminer u_3 on résout le système

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -8 & 2 & 5 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & -1 \\ -11 & 3 & 7 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -8 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & -5 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right).$$

où on a fait les mêmes opérations. On trouve alors $u_3 = (1, 2, 1)$.
Par construction,

$$\mathsf{Mat}_{(u_1,u_2,u_3)}(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$