Soit $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n + n^3x^2}$ définie sur $\mathbf{R}_+^*$.

1. Montrer que $f$ est continue

**Corrigé**

On pose $f_n = x \mapsto \frac{1}{n+n^3x^2}$ qui est continue sur $\mathbf{R}_+^*$.
Soit $a > 0$, la fonction $f_n$ est positive et décroissante sur $K = [a, +\infty[$ donc $||f_n||_{\infty,K} = f_n(a)$. Comme $f_n(a) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^3a^2}$, la série $\sum ||f_n||_{\infty,K}$ converge. De ce fait, la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement donc uniformément sur $[a, +\infty[$. Ceci étant vrai pour tout $a > 0$, la fonction $f$ est continue sur $\mathbf{R}_+^*$.

2. Calculer $\lim\limits_{+\infty} f$.

**Corrigé**

Déterminons $\lim\limits_{+\infty} f$. On a montré à la question précédente que la série $\sum f_n$ converge uniformément sur $[1, +\infty[$ qui est un voisinage de $+\infty$. De plus, pour tout entier $n$ non nul, $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$. On en déduit par le théorème de double limite que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} 0 = 0$.

3. Calculer $\lim\limits_{0^+} f$.

**Corrigé**

Déterminons $\lim\limits_{0} f$. La fonction $f$ est décroissante sur $\mathbf{R}_+^*$ comme somme de fonctions décroissantes. On en déduit que $\lim\limits_{x\to0^+} f$ existe dans $\overline{\mathbf{R}}$. Notons $\ell$ cette limite. Pour tout entier $N$ et tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, on remarque que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{N} f_n(x) + \sum_{n=N+1}^{+\infty} f_n(x) \geqslant \sum_{n=1}^{N} f_n(x).$$

En passant à la limite quand $x \to 0^+$,

$$\ell \geqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}.$$

Il suffit alors de faire tendre $N$ vers $+\infty$ pour vérifier que $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = +\infty$.

4. La fonction $f$ est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}_+^*$.

**Corrigé**

Pour tout entier $n \geqslant 1$, la fonction $f_n$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}_+^*$ et $f_n' : x \mapsto -\dfrac{2n^3x}{(n+n^3x^2)^2}$. Soit $K = [a, b]$ un segment de $\mathbf{R}_+^*$, pour $x \in K$,

$$|f_n'(x)| \leqslant \frac{2n^3b}{(n+n^3a)^2} \leqslant \frac{C}{n^3} \text{ où } C = \frac{2b}{a^2}$$

On a donc $||f_n'||_{\infty,K} \leqslant \dfrac{C}{n^3}$ et donc la série $\sum ||f_n'||_{\infty,K}$ converge.
Cela montre que la série $\sum f_n'$ converge normalement donc uniformément sur tout segment $K \subset \mathbf{R}_+^*$. La fonction $f$ est donc de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}_+^*$.