Exercice I

Dans tout cet exercice, n désigne un entier naturel non nul.
Soit $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension n.
On considère G un sous-groupe du groupe $(\mathsf{GL}(E), \circ)$ tel que pour tout $u \in G$, $u^2 = \mathsf{id}_E$.

1) Montrer que pour tout $(u, v) \in G^2$, $u \circ v = v \circ u$.
2) Soit $u \in G$. Que dire du spectre u ? Justifier que u est diagonalisable.
3) Soit u et v deux éléments de G.
   a) Montrer que les espaces propres $E_1(u) = \mathsf{Ker}(u - \mathsf{id}_E)$ et $E_{-1}(u) = \mathsf{Ker}(u + \mathsf{id}_E)$ sont stables par v.
   b) En déduire qu'il existe une base $\mathscr{B}$ telle que $\mathsf{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ et $\mathsf{Mat}_{\mathscr{B}}(v)$ sont diagonales.
   On pourra justifier que les endomorphismes induits par v sur $E_1(u)$ et $E_{-1}(u)$ sont diagonalisables.
4) Soit r un entier naturel non nul et $u_1, \dots, u_r$ des éléments de G. Montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ tel que pour tout i compris entre 1 et r, $\mathsf{Mat}_{\mathscr{B}}(u_i)$ sont diagonales.
5) En déduire que G est fini et que $\mathsf{Card}(G) \leqslant 2^n$.
6) Montrer que si p et q sont deux entiers non nuls distincts, les groupes $(\mathsf{GL}_p(\mathbf{K}), \times)$ et $(\mathsf{GL}_q(\mathbf{K}), \times)$ ne sont pas isomorphes, c'est-à-dire qu'il n'existe pas d'isomorphisme entre les deux groupes.

Exercice II

Dans tout cet exercice n désigne un entier naturel non nul.
Soit σ une permutation de S_n, on note $P_\sigma \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ la matrice définie par

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, (P_\sigma)[i,j] = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma(j) = i \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On considère $f_\sigma : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ l'endomorphisme canoniquement associé à P_σ. On notera $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbf{R}^n$.

1) Soit $j \in [\![1,n]\!]$, déterminer $f_\sigma(e_j)$.
2) En déduire que pour σ, σ' dans S_n, $P_{\sigma \circ \sigma'} = P_\sigma P_{\sigma'}$ puis que $(P_\sigma)^{-1} = P_{\sigma^{-1}}$.

Soit σ, σ' deux permutations de S_n. Elles sont dites conjuguées s'il existe une permutation τ telle que $\sigma' = \tau \circ \sigma \circ \tau^{-1}$.

3) Montrer que si σ et σ' sont conjuguées alors P_σ et $P_{\sigma'}$ sont semblables.
4) Réciproquement, soit σ et σ' deux permutations telles que P_σ et $P_{\sigma'}$ soient semblables. Pour tout entier k compris entre 2 et n, on note $c_k(\sigma)$ (resp. $c_k(\sigma')$) le nombre de k-cycles dans la décomposition de σ (resp. de σ') en cycles à supports disjoints, et on note $c_1(\sigma)$ (resp. $c_1(\sigma')$) le nombre de points fixes de σ (resp. de σ').
   a) Montrer que $\chi_{P_\sigma} = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} (X^k - 1)^{c_k(\sigma)}$. On pourra montrer que P_σ est semblable à une matrice diagonale par blocs d'une forme intéressante.
   b) Soit $m \in [\![1,n]\!]$. Montrer que $\displaystyle\sum_{m|k} c_k(\sigma) = \sum_{m|k} c_k(\sigma')$.
   On pourra considérer l'ordre de multiplicité d'un nombre complexe bien choisi.
   c) En déduire que
   $$\forall m \in [\![1,n]\!], \quad c_m(\sigma) = c_m(\sigma')$$
   d) Soit $\gamma = (a_1, \dots, a_p)$ et $\tau \in S_n$. Calculer $\tau \circ \gamma \circ \tau^{-1}$.
   e) En déduire que σ et σ' sont conjuguées.