Notations :
Pour $p \in \mathbb{C}^n$, D_p est la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont ceux de p.
Pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathsf{Sp}(A)$ désigne le spectre de A, c'est-à-dire l'ensemble des valeurs propres de A. On note alors $\rho(A) = \max\{|\lambda|\,;\,\lambda \in \mathsf{Sp}(A)\}$. On notera encore A l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé à A.

Partie I

Dans cette partie, on munit $\mathbb{C}^n$ de la norme $\|\ \|_\infty$ soit $\|z\|_\infty = \max\limits_{j=1,\ldots,n} |z_j|$.
On définit l'application

$$\begin{array}{rccc} N_\infty : & \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) & \to & \mathbb{R} \\ & A & \mapsto & N_\infty(A) = \max\limits_{i=1,\ldots,n} \sum\limits_{j\in[\![1,n]\!]} |a_{i,j}| \end{array}$$

1) Montrer que $A \mapsto N_\infty(A)$ est une norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.
2) a) Montrer que $\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}), \forall z \in \mathbb{C}^n : \|A(z)\|_\infty \leqslant N_\infty(A)\,\|z\|_\infty$.
   b) Montrer l'égalité : $N_\infty(A) = \max\limits_{z\in(\mathbb{C}^n\setminus\{0\})} \dfrac{\|A(z)\|_\infty}{\|z\|_\infty}$.
   c) Montrer que $\rho(A) \leqslant N_\infty(A)$.
3) Montrer que N_∞ est une norme matricielle c'est-à-dire qu'elle vérifie :

$$\forall (A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}), N_\infty(AB) \leqslant N_\infty(A)\ N_\infty(B).$$

4) Soit $Q \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice inversible. On définit

$$\begin{array}{rccc} N_Q : & \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) & \to & \mathbb{R} \\ & A & \mapsto & N_\infty(Q^{-1}AQ). \end{array}$$

   a) Vérifier que N_Q est une norme matricielle sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.
   b) Montrer qu'il existe une constante C_Q telle que
   $$\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \quad \frac{1}{C_Q} N_\infty(A) \leqslant N_Q(A) \leqslant C_Q N_\infty(A).$$
5) a) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Soit $p = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{C}^n$. On suppose que les p_i sont tous non nuls. Exprimer les coefficients de $D_p^{-1}AD$ en fonction de ceux de A.
   b) Soit $T \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice triangulaire supérieure et $\varepsilon > 0$ donné. Montrer que l'on peut choisir une matrice diagonale $D_S \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ avec $S = (s, s^2, s^3, \ldots, s^n) \in \mathbb{C}^n$ où s est un réel strictement positif telle que : $N_{D_S}(T) < \rho(T) + \varepsilon$.
   c) Étant donnés $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et $\varepsilon > 0$, montrer qu'il existe une norme matricielle N_ε telle que $N_\varepsilon(A) < \rho(A) + \varepsilon$.
6) En déduire l'équivalence : $\lim\limits_{k\to\infty} A^k = 0 \Leftrightarrow \rho(A) < 1$.

Partie II

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ fixée ; pour $i \in [\![1,n]\!]$ on pose : $L_i = \sum_{\substack{j\in[\![1,n]\!] \\ j\neq i}} |a_{ij}|$ et $C_j = \sum_{\substack{i\in[\![1,n]\!] \\ i\neq j}} |a_{ij}|$.

On définit les sous-ensembles du plan complexe :

$$G_L(A) = \bigcup_{i=1}^{n} D_i(A) \text{ où } D_i(A) = \{z \in \mathbb{C}, |z - a_{ii}| \leqslant L_i\}$$

$$G_C(A) = \bigcup_{j=1}^{n} D'_j(A) \text{ où } D'_j(A) = \{z \in \mathbb{C}, |z - a_{jj}| \leqslant C_j\}$$

On désigne par $C_i(A)$ le cercle bordant le disque $D_i(A)$.

7) Soit $A = \begin{pmatrix} 4+3i & i & 2 & -1 \\ i & -1+i & 0 & 0 \\ 1+i & -i & 5+6i & 2i \\ 1 & -2i & 2i & -5-5i \end{pmatrix}$.

   Représenter dans le plan complexe $G_L(A)$ et $G_C(A)$.

8) On se propose de montrer l'inclusion $\mathsf{Sp}(A) \subset G_L(A) \cap G_C(A)$.

   a) Soit $M = (m_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que le système linéaire $MZ = 0$ a une solution non nulle.
   Montrer que : $\exists p \in [\![1,n]\!] \quad |m_{pp}| \leqslant L_p$.

   b) Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et $\lambda \in \mathsf{Sp}(A)$.
   En utilisant la question précédente, montrer que $\lambda \in G_L(A)$.

   c) Conclure en justifiant l'inclusion $\mathsf{Sp}(A) \subset G_C(A)$.

9) Soit $p \in \mathbb{R}^n$. On note $p > 0$ lorsque $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ et $p_j > 0$ pour $j = 1, 2, \dots, n$. Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et D_p matrice diagonale avec $p > 0$. Déterminer $G_L(D^{-1}AD)$.

10) a) Déduire de 8) et 9) l'inégalité

$$\rho(A) \leqslant \inf_{p>0} \left(\max_{i\in[\![1,n]\!]} \frac{1}{p_i} \sum_{j=1}^{n} p_j \, |a_{i,j}| \right).$$

   b) Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 7 & -16 & 8 \\ -16 & 7 & -8 \\ 8 & -8 & -5 \end{pmatrix}$.

      i) Montrer que le majorant de $\rho(A)$ donné par 10.a) est supérieur ou égal à $\dfrac{83}{3}$.

      ii) Donner une valeur approchée de $\rho(A)$ (on pourra utiliser la calculatrice).