1) Comme u a n valeurs propres distinctes, il est diagonalisable car la somme de ses sous-espaces propres (non triviaux), qui sont en somme directe, a pour dimension au moins n donc est égale à E.

2) a) $u \circ v = X(u) \circ P(u) = (XP)(u) = (PX)(u) = P(u) \circ X(u) = v \circ u$.

   b) Dans la base $\mathscr{B}$, la matrice de v est la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont $P(\lambda_1), \dots, P(\lambda_n)$. Ainsi v est diagonalisable et ses valeurs propres, répétées selon leurs multiplicités, sont $P(\lambda_1), \dots, P(\lambda_n)$.
   On a donc $\det(v) = \prod_{i=1}^n P(\lambda_i)$.

3) **Application** :

   a) À l'aide d'un développement selon la cinquième colonne,

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & X & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & X & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & X & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & X \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} -1 & X & 0 & 0 \\ 0 & -1 & X & 0 \\ 0 & 0 & -1 & X \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} + X \begin{vmatrix} X & 0 & 0 & 0 \\ -1 & X & 0 & 0 \\ 0 & -1 & X & 0 \\ 0 & 0 & -1 & X \end{vmatrix} = -(-1)^4 + XX^4$$

   puisqu'on s'est ramené à des déterminants de matrices triangulaires, l'une supérieure et l'autre inférieure.
   Ainsi $\chi_A = X^5 - 1 = (X-1)(X-\alpha)(X-\alpha^2)(X-\alpha^3)(X-\alpha^4)$, donc les valeurs propres de A sont les racines cinquièmes de l'unité : $1 = \alpha^0, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4$.
   $1 + X + X^2 + X^3 + X^4 = \frac{X^5-1}{X-1} = (X-\alpha)(X-\alpha^2)(X-\alpha^3)(X-\alpha^4)$ a pour racines $\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4$.

   b) Notant u l'endomorphisme de $E = \mathbb{C}^5$ canoniquement associé à A et $can = (e_0, \dots, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{C}^5$, l'endomorphisme u transforme $(e_0, \dots, e_4)$ en $(e_1, \dots, e_4, e_0)$. Ainsi pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $j \in [\![0, 4]\!]$,
   $u^k(e_j) = e_r$ où r est le reste de la division euclidienne de $j + k$ par 5.
   On en déduit que

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \dots , \; A^5 = I_5$$

   et donc

$$B = A + 2A^2 + 3A^4 + 4A^4 + 5A^5$$

   Comme $\alpha^5 = 1$, les valeurs propres de B sont

$$\alpha+2\alpha^2+3\alpha^3+4\alpha^4+5,\ \alpha^2+2\alpha^4+3\alpha+4\alpha^3+5,\ \alpha^3+2\alpha+3\alpha^4+4\alpha^2+5,\ \alpha^4+2\alpha^3+3\alpha^2+4\alpha+5,\ 1+2+3+4+5$$

   et son déterminant est le produit des complexes ci-dessus.

   c) Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $z^5 = 1$ et $z \neq 1$.

$$\begin{aligned} (z-1)(5z^5 + 4z^4 + 3z^3 + 2z^2 + z) &= 5z^6 + 4z^5 + 3z^4 + 2z^3 + z^2 - (5z^5 + 4z^4 + 3z^3 + 2z^2 + z) \\ &= 5z - 1 - z^4 - z^3 - z^2 - z = 5z \end{aligned}$$

   car comme $z \neq 1$, on a $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = \frac{1-z^5}{1-z} = 0$.
   On a donc

$$5z^5 + 4z^4 + 3z^3 + 2z^2 + z = \frac{5z}{z-1}$$

d) Ainsi

$$\begin{aligned}
\det(B) &= 15.\frac{5\alpha}{\alpha-1}.\frac{5\alpha^2}{\alpha^2-1}.\frac{5\alpha^3}{\alpha^3-1}.\frac{5\alpha^4}{\alpha^4-1} \\
&= 15\frac{5^4\alpha^{10}}{(1-\alpha)(1-\alpha^2)(1-\alpha^3)(1-\alpha^4)} \\
&= \frac{15.5^4}{(1+X+X^2+X^3+X^4)(1)} = 3.5^4
\end{aligned}$$

4) a) Soit $i \in [\![1,n]\!]$. Comme $E_{\lambda_i}(u) = \ker(u - \lambda_i id_E)$ est stable par v (puisque u et v commutent), $v(e_i) \in E_{\lambda_i}(u)$. Or $E_{\lambda_i}(u) = Vect(e_i)$ (les sous-espaces propres non triviaux sont de dimension 1 puisque les valeurs propres sont au nombre de n), $\exists \mu_i \in \mathbb{C}$ tel que $v(e_i) = \mu_i e_i$.

Ainsi v est diagonalisable et la base $\mathscr{B}$ est une base propre pour v.

b) On utilise les polynômes de Lagrange :

$$P = \sum_{i=1}^{n} \mu_i L_i$$

avec $L_i = \prod_{j \in [\![1,n]\!]\setminus\{i\}} \frac{X-\lambda_j}{\lambda_i-\lambda_j}$

c) $v = P(u)$ car v et $P(u)$ sont linéaires et coïncident sur la base $\mathscr{B}$.

5) Soit $C_u = \{v \in \mathscr{L}(E) / u \circ v = v \circ u\}$.

a) On vient de montrer dans la question précédente que

$$\begin{aligned}
v \in C_u &\Rightarrow \text{il existe une base de } E \text{ dans laquelle les matrices de } u \text{ et } v \text{ sont diagonales} \\
&\Rightarrow \text{il existe un polynôme } P \in \mathbb{C}_{n-1}[X] \text{ tel que } v = P(u).
\end{aligned}$$

Enfin, on a rappelé en 2)a) que si v est un polynôme en u, alors il commute avec u.

b) L'application $v \in \mathscr{L}(E) \mapsto u \circ v - v \circ u \in \mathscr{L}(E)$ est linéaire car la composition des applications est bilinéaire. Comme C_u est son noyau, c'est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$.

C_u contient l'identité.

Enfin pour tous $v, w \in C_u$,

$$u \circ (v \circ w) = v \circ u \circ w = (v \circ w) \circ u$$

donc $v \circ w \in C_u$.

Ainsi C_u est une sous-algèbre de $\mathscr{L}(E)$.

c) Notons que $(id, u, \cdots, u^{n-1})$ est une famille libre de $\mathscr{L}(E)$ car sinon il existerait un polynôme non nul de degré strictement inférieur à n annulant u, ce qui est impossible car tout polynôme annulateur de u admet au moins $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ pour racines donc est de degré au moins n s'il est non nul.

La famille $(id, u, \cdots, u^{n-1})$ engendre C_u en vertu de la question 4)c), donc c'est une base de C_u, qui est ainsi de dimension n.

On aurait aussi pu rappeler le cours qui assure que si d est le degré de son polynôme minimal, $(id, u, \ldots, u^{d-1})$ est une base de $\mathbb{K}[u]$, ce qui permet de conclure puisqu'ici, $C_u = \mathbb{K}[u]$ et $M_u = (X-\lambda_1)\ldots(X-\lambda_n)$.

6) **Application** : Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

a) Par développement selon la première ligne,

$$\begin{aligned}\chi_A &= (X-2)[(X+4)(X-5)-2.(-12)]-4[(-3).2-(X+4).(-1)] \\ &= (X-2)(X^2-X+4)-4(X-2)=(X-2)(X^2-X)=X(X-1)(X-2)\end{aligned}$$

Le spectre de A est donc $\{0,1,2\}$.
Le calcul montre que $E_0(A)=Vect(\begin{pmatrix}-4 & 3 & 2\end{pmatrix})$, $E_1(A)=Vect(\begin{pmatrix}-4 & 0 & 1\end{pmatrix})$, $E_2(A)=Vect(\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\end{pmatrix})$.
Ainsi posant $P=\begin{pmatrix}-4 & -4 & 2\\ 3 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}$ et $A'=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$, on a $P^{-1}AP=A'$.

b) On se propose de déterminer les matrices B telles que $B^2=A$ (1).
Si B vérifie (1), alors $AB=BA$ car B est A est un polynôme en B donc commute avec B.
Supposons que B vérifie (1). Comme B commute avec A et que A est diagonalisable à valeurs propres simples (racines simples du polynôme caractéristique), d'après la question 4a) $P^{-1}BP=B'$ est diagonale. De plus $B'^2=A'$.
Donc $B'=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & \alpha & 0\\ 0 & 0 & \beta\end{pmatrix}$ avec $\alpha\in\{-1,1\}$ et $\beta\in\{-\sqrt{2},\sqrt{2}\}$.
Réciproquement si $B=PB'P^{-1}$ où B' est une des quatre matrices décrite ci-dessus, alors $B'^2=A'$ donc $B^2=A$.

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{4}B_k=P0_4P^{-1}=0_4$ et $\displaystyle\prod_{k=1}^{4}B_k=P\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}P^{-1}=A^2=\begin{pmatrix}8 & -8 & 28\\ 6 & -8 & 24\\ 1 & -2 & 5\end{pmatrix}$.