Dans tout le problème , E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie $n \geqslant 1$ et u désigne un endomorphisme de E ayant n valeurs propres distinctes $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$

1) Justifier qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de E dans laquelle la matrice de u est diagonale.
2) Soit $P = \sum_{i=0}^{N} a_i X^i$ un polynôme de $\mathbb{C}[X]$, et $v = P(u)$.
   a) Justifier que $u \circ v = v \circ u$.
   b) Montrer que v est diagonalisable et calculer les valeurs propres de v et son déterminant en fonction des valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ de u.
3) **Application** : Soient les matrices de $\mathscr{M}_5(\mathbb{C})$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

   a) Déterminer les valeurs propres de A. On les exprimera à l'aide de $\alpha = e^{\frac{2i\pi}{5}}$.
   Quelles sont, en fonction de α, les racines complexes du polynôme $1 + X + X^2 + X^3 + X^4$?
   b) Montrer qu'il existe cinq complexes a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 tels que :
   $$B = a_0 I_5 + a_1 A + a_2 A^2 + a_3 A^3 + a_4 A^4$$
   En déduire les valeurs propres de B et une expression du déterminant de B : on exprimera les valeurs propres comme combinaison linéaire à coefficients entiers de $1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4$, mais on ne cherchera pas à simplifier le déterminant.
   c) Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $z^5 = 1$ et $z \neq 1$. Simplifier :
   $$(z-1)(5z^5 + 4z^4 + 3z^3 + 2z^2 + z)$$
   d) En déduire que $\det(B) = 3.5^4$.
4) Dans cette question, v est un endomorphisme de E tel que $u \circ v = v \circ u$.
   On note $(e_1, \cdots, e_n)$ une base de E formée de vecteurs propres de u, associés aux valeurs propres $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$. On rappelle que, dans cette partie, les valeurs propres de u sont simples.
   a) Montrer que : $\forall\, i \in [\![1, n]\!]$, $\exists \mu_i \in \mathbb{C}$ tel que $v(e_i) = \mu_i e_i$. Conclure.
   b) Soit n nombres complexes, notés $\mu_1, \cdots, \mu_n$. Ecrire l'unique polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré inférieur ou égal à $n-1$ tel que :
   $$\forall\, i \in [\![1, n]\!] \quad , \quad P(\lambda_i) = \mu_i$$
   c) Déduire des questions précédentes qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ tel que $v = P(u)$.
5) Soit $C_u = \{v \in \mathscr{L}(E) / u \circ v = v \circ u\}$.
   a) Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes :
      i) $v \in C_u$
      ii) il existe une base de E dans laquelle les matrices de u et v sont diagonales.
      iii) il existe un polynôme $P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ tel que $v = P(u)$.
   b) Montrer que C_u est une sous-algèbre de $\mathscr{L}(E)$.
   Montrer que $(id, u, \cdots, u^{n-1})$ est une famille libre de $\mathscr{L}(E)$.
   Donner une base de C_u et sa dimension.

6) **Application** : Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer les éléments propres de A, montrer que A est diagonalisable et déterminer une matrice P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

b) On se propose de déterminer les matrices B telles que $B^2 = A$ (1).
Montrer que si B vérifie (1), alors $AB = BA$.
Déduire, à l'aide de la question précédente et de 4)a), toutes les solutions de (1) : on donnera ces solutions sous la forme PD_kP^{-1}, $k = 1, \cdots m$, où $D_1, \cdots, D_m$ sont des matrices diagonales.

c) Si $\{B_1, \cdots, B_m\}$ est l'ensemble des solutions de (1), calculer $\sum_{k=1}^{m} B_k$ et $\prod_{k=1}^{m} B_k$.