Problème I

Partie I - Premières propriétés des fonctions S_α

1) a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $e^{-xn} = (e^{-x})^n$. On en déduit que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} e^{-xn}$ est une série géométrique, de raison e^{-x} ; elle converge donc si et seulement si $e^{-x} \in]-1,1[$ c'est-à-dire si et seulement si $x > 0$.

Ainsi la série de fonctions définissant S_1 converge simplement sur $]0,+\infty[$. De plus, pour tout $x > 0$: $\boxed{S_1(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (e^{-x})^n = \dfrac{1}{1-e^{-x}}}$

b) On utilise l'équivalent classique : $e^{-x} - 1 \underset{x\to 0}{\sim} -x$. On en déduit : $\boxed{S_1(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{x}}$

En particulier, $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} S_1(x) = +\infty}$

c) Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} S_1(x) = 1$.

De plus, pour tout $x > 0$, on a :

$$S_1(x) - 1 = \frac{1}{1-e^{-x}} - 1 = \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} \underset{x\to+\infty}{\sim} e^{-x}.$$

2) a) Soit $x \leqslant 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $-xn^\alpha \geqslant 0$, donc $e^{-xn^\alpha} \geqslant e^0 = 1$. Ainsi $\left(e^{-xn^\alpha}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0, donc la série $\sum_{n\geqslant 0} e^{-xn^\alpha}$ diverge grossièrement.

b) Soit $x > 0$. Comme $n^2 e^{-xn^\alpha} = (n^\alpha)^{2/\alpha} e^{-xn^\alpha}$ et que $\lim\limits_{u\to+\infty} u^{2/\alpha} e^{-xu} = 0$, d'après le théorème des croissances comparées, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 e^{-xn^\alpha} = 0$. On en déduit : $e^{-xn^\alpha} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Les séries $\sum_{n\geqslant 1} e^{-xn^\alpha}$ et $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ sont à termes positifs et la seconde série est une série de Riemann convergente du fait que $2 > 1$; d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, on en déduit que la série $\sum_{n\geqslant 0} e^{-xn^\alpha}$ converge $\boxed{\text{si } x > 0}$

c) D'après les deux questions précédentes, la fonction S_α a pour domaine de définition $]0,+\infty[$.

3) Notons $f_n : x \mapsto e^{-xn^\alpha}$.

a) Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [\varepsilon,+\infty[$, on a : $\left|e^{-xn^\alpha}\right| = e^{-xn^\alpha} \leqslant e^{-\varepsilon n^\alpha}$. On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant \|f_n\|_{\infty,[\varepsilon,+\infty[} \leqslant e^{-\varepsilon n^\alpha},$$

Or nous avons démontré dans la question 2)b) que la série $\sum_{n\geqslant 0} e^{-\varepsilon n^\alpha}$ converge. D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, on en déduit que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge normalement sur $[\varepsilon,+\infty[$. On en déduit que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge normalement donc uniformément au voisinage de tout point a de $]0,+\infty[$. Comme de plus, pour tout entier naturel n, la fonction f_n est continue sur $]0,+\infty[$, on obtient que S_α est continue sur $]0,+\infty[$.

b) Appliquons le théorème de la double limite :

— la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge normalement donc uniformément sur $[42, +\infty[$ qui est voisinage de $+\infty$.

— pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n a une limite finie en $+\infty$;

$$\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On en déduit, d'après $\boxed{\text{le théorème de la double limite}}$:

$$\lim_{x\to+\infty} S_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 1.$$

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application f_n est décroissante sur $]0, +\infty[$; pour tous réels x et y tels que $0 < x \leqslant y$: $f_n(y) \leqslant f_n(x)$. En sommant de 0 à $+\infty$ on a, pour tous réels x et y tels que $0 < x \leqslant y$: $\boxed{S_\alpha(y) \leqslant S_\alpha(x)}$.

On en déduit que la fonction S_α est $\boxed{\text{décroissante sur }]0, +\infty[}$

Une fonction monotone admet une limite, éventuellement infinie, en les extrémités de son domaine de définition ; la fonction S_α admet une limite finie ou infinie en 0^+.

d) Soient $N \in \mathbb{N}$ et $x > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $e^{-xn^\alpha} \geqslant 0$, donc :

$$S_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{N} e^{-xn^\alpha} + \sum_{n=N+1}^{+\infty} e^{-xn^\alpha} \geqslant \sum_{n=0}^{N} e^{-xn^\alpha}.$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{-xn^\alpha} = e^0 = 1$, par continuité de l'exponentielle en 0. On en déduit, quand $x \to 0$,

$$\lim_{x\to 0^+} S_\alpha(x) \geqslant \sum_{n=0}^{N} 1 = N + 1,$$

l'existence de la limite dans le membre de gauche étant bien établie dans la question 3.c). En faisant alors tendre N vers $+\infty$ on obtient

$$\lim_{x\to 0^+} S_\alpha(x) = +\infty.$$

Partie II - Étude de $S_\alpha(x)$ quand x tend vers 0 et $+\infty$

4) a) Soit $\alpha \in> 0$. L'application $u \mapsto e^{-u}u^{\alpha-1}$ est continue sur $]0, +\infty[$.

— Étude sur $]0, 1]$: On a : $e^{-u}u^{\alpha-1} \underset{u\to 0}{\sim} u^{\alpha-1} = \dfrac{1}{u^{1-\alpha}}$.

Ici $\alpha > 0$ et donc $1 - \alpha < 1$. On en déduit que $u \mapsto \dfrac{1}{u^{1-\alpha}}$ est une fonction de Riemann intégrable sur $]0, 1]$. L'application $u \mapsto e^{-u}u^{\alpha-1}$ est aussi intégrable sur $]0, 1]$.

Ainsi l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 e^{-u}u^{\alpha-1}du$ converge.

— Étude sur $[1,+\infty[$: On a, d'après le théorème des croissances comparées : $\lim\limits_{u\to+\infty} u^2 \cdot u^{\alpha-1}e^{-u} = 0$. On en déduit :

$$e^{-u}u^{\alpha-1} \underset{u\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{u^2}\right).$$

La fonction de Riemann $u \mapsto \dfrac{1}{u^2}$ est intégrable $[1,+\infty[$ car $2>1$ Cela implique que $u \mapsto e^{-u}u^{\alpha-1}$ l'est également.

Ainsi l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-u}u^{\alpha-1}du$ converge.

Finalement, l'intégrale $\Gamma(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u}u^{\alpha-1}du$ converge dans le cas où $\alpha > 0$.

b) Par intégration par parties

$$\int_0^{+\infty} e^{-u}u^{\alpha}du = \left[-e^{-u}u^{\alpha}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty}(-e^{-u})\alpha u^{\alpha-1}du$$

L'intégration par parties est valide car $\boxed{u \mapsto e^{-u}u^{\alpha} \text{ s'annule en } 0}$ et $\boxed{\lim\limits_{u\to+\infty} e^{-u}u^{\alpha} = 0}$ par croissances comparées. On en déduit

$$\int_0^{+\infty} e^{-u}u^{\alpha}du = \alpha\int_0^{+\infty} e^{-u}u^{\alpha-1}du,$$

c'est-à-dire : $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$.

On a immédiatement : $\Gamma(1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u}du = \left[-e^{-u}\right]_0^{+\infty} = 1$.

Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que : $\forall n \in \mathbb{N}, \Gamma(n+1) = n!$.

— Si $n = 0$, cela vient d'être établi, vu que $0! = 1$ et $\Gamma(1) = 1$.

— Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\Gamma(n+1) = n!$. Alors, d'après l'égalité démontrée ci-dessus :

$$\Gamma(n+2) = (n+1)\Gamma(n+1) = (n+1)n! = (n+1)!$$

— Par le principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \Gamma(n+1) = n!$

c) Soit $x > 0$. On a :

$$\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \int_0^{+\infty} e^{-u}u^{\frac{1}{\alpha}-1}du.$$

Posons $u = xt^{\alpha}$. La fonction $t \mapsto xt^{\alpha}$ est une bijection strictement croissante de classe $\mathscr{C}^1$ de $]0,+\infty[$ dans lui-même. De plus $du = x\alpha t^{\alpha-1}dt$. On en déduit que

$$\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \int_0^{+\infty} e^{-xt^{\alpha}}x^{\frac{1}{\alpha}-1}t^{1-\alpha}x\alpha t^{\alpha-1}dt = \alpha x^{\frac{1}{\alpha}}\int_0^{+\infty} e^{-xt^{\alpha}}dt$$

En particulier, d'après le théorème de changement de variables, l'intégrale $I(\alpha)$ converge et $\boxed{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \alpha x^{\frac{1}{\alpha}}I(\alpha)}$

5) a) Soit $x > 0$. On fait une comparaison entre série et intégrale. L'application $t \mapsto e^{-xt^{\alpha}}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Pour tout entier $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_0^{N+1} e^{-xt^{\alpha}}dt \leqslant \sum_{n=0}^{N} e^{-xn^{\alpha}}$$

En faisant tendre N vers $+\infty$ on obtient que : $I(\alpha) \leqslant S_\alpha(x)$.

De même,

$$\sum_{n=1}^{N} e^{-xn^\alpha} \leqslant \int_0^N e^{-xt^\alpha} dt$$

et donc : $S_\alpha(x) - 1 \leqslant I(\alpha)$.

On a donc obtenu $\boxed{0 \leqslant S_\alpha(x) - I(\alpha) \leqslant 1}$

Or, d'après la question précédente $I(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha x^{\frac{1}{\alpha}}}\Gamma\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)$ et donc

$$0 \leqslant S_\alpha(x) - \frac{1}{\alpha x^{\frac{1}{\alpha}}}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) \leqslant 1,$$

b) On a $\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) > 0$: il s'agit de l'intégrale sur $]0, +\infty[$ d'une fonction CONTINUE, positive et non identiquement nulle. Ainsi, pour tout $x > 0$ on a, partant de l'encadrement la question précédente où l'on divise tout par $\dfrac{1}{\alpha x^{\frac{1}{\alpha}}}\Gamma\left(\dfrac{1}{\alpha}\right) > 0$, puis ajoute 1 :

$$1 \leqslant \frac{\alpha x^{\frac{1}{\alpha}}}{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)} S_\alpha(x) \leqslant \frac{\alpha x^{\frac{1}{\alpha}}}{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)} + 1,$$

or $\dfrac{1}{\alpha} > 0$, donc : $\lim\limits_{x\to 0} x^{\frac{1}{\alpha}} = 0$. Il est alors immédiat que les deux extrémités de l'encadrement ci-dessus ont pour limite 1 quand $x \to 0$. On en déduit, d'après le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\alpha x^{\frac{1}{\alpha}}}{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)} S_\alpha(x) = 1$. C'est-à-dire :

$$S_\alpha(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{\alpha x^{\frac{1}{\alpha}}}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right).$$

Comme, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\alpha x^{\frac{1}{\alpha}}}\Gamma\left(\dfrac{1}{\alpha}\right) = +\infty$, on retrouve le résultat de la question 3.d)

6) a) Il suffit de reprendre le changement de variable $u = xt^\alpha$ de la question 4.c) en changeant les bornes. Comme $x > 0$, alors l'application $t \mapsto xt^\alpha$ est de classe $\mathscr{C}^1$, strictement croissante et réalise une bijection de $[1, +\infty[$ dans $[x, +\infty[$. On en déduit :

$$\int_1^{+\infty} e^{-xt^\alpha} dt = \frac{1}{\alpha x^{\frac{1}{\alpha}}} \int_x^{+\infty} e^{-u} u^{\frac{1}{\alpha}-1} du. \qquad (1)$$

b) On réalise une intégration par parties sur $[x, +\infty[$:

$$\int_x^{+\infty} e^{-u} u^{\frac{1}{\alpha}-1} du = \left[-e^{-u} u^{\frac{1}{\alpha}-1}\right]_x^{+\infty} - \int_x^b (-e^{-u}) \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) u^{\frac{1}{\alpha}-2} du$$

L'intégration par parties est valide car le crochet converge puisque $u \mapsto -e^{-u} u^{\frac{1}{\alpha}-1}$ vaut $-e^{-x} x^{\frac{1}{\alpha}-1}$ en x et que $\lim\limits_{u\to+\infty} -e^{-u} u^{\frac{1}{\alpha}-1} = 0$ par croissances comparées. On en déduit

$$\int_x^{+\infty} e^{-u} u^{\frac{1}{\alpha}-1} du = e^{-x} x^{\frac{1}{\alpha}-1} + \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) \int_x^b e^{-u} u^{\frac{1}{\alpha}-2} du.$$

La fonction $u \mapsto e^{-u}u^{\frac{1}{\alpha}-1}$ est positive, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-u}u^{\frac{1}{\alpha}-1}du$ converge et $e^{-u}u^{\frac{1}{\alpha}-2} \underset{+\infty}{=} o\left(e^{-u}u^{\frac{1}{\alpha}-1}\right)$. D'après le théorème d'intégration des relations de comparaison,

$$\int_x^{+\infty} e^{-u}u^{\frac{1}{\alpha}-2}du = \underset{+\infty}{o}\left(\int_x^{+\infty} e^{-u}u^{\frac{1}{\alpha}-1}du\right)$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} e^{-x}x^{\frac{1}{\alpha}-1} &= \int_x^{+\infty} e^{-u}u^{\frac{1}{\alpha}-1}du - \left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\int_x^{b} e^{-u}u^{\frac{1}{\alpha}-2}du \\ &= \int_x^{+\infty} e^{-u}u^{\frac{1}{\alpha}-1}du + \underset{+\infty}{o}\left(\int_x^{+\infty} e^{-u}u^{\frac{1}{\alpha}-1}du\right) \\ &\underset{+\infty}{\sim} \int_x^{+\infty} e^{-u}u^{\frac{1}{\alpha}-1}du \end{aligned}$$

c) En utilisant les résultats des questions 6.a) et 6.c) on obtient :

$$\int_1^{+\infty} e^{-xt^\alpha}dt = \frac{1}{\alpha x^{\frac{1}{\alpha}}}\int_x^{+\infty} e^{-u}u^{\frac{1}{\alpha}-1}du \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{e^{-x}x^{\frac{1}{\alpha}-1}}{\alpha x^{\frac{1}{\alpha}}} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{e^{-x}}{\alpha x}.$$

Le terme de droite est négligeable devant e^{-x} quand $x \to +\infty$ donc l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-xt^\alpha}dt$ est négligeable devant e^{-x} quand $x \to +\infty$.

7) a) On reprend la comparaison entre série et intégrale de la question 5.c), mais en sommant à partir de $n = 2$. Pour toutn entier N, on a

$$\sum_{n=2}^{N} e^{-xn^\alpha} \leqslant \int_1^{N} e^{-xt^\alpha}dt$$

L'inégalité voulue est alors obtenue en faisant tendre N vers $+\infty$.

b) Pour tout $x > 0$, on a :

$$S_\alpha(x) - 1 = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-xn^\alpha} = e^{-x} + \sum_{n=2}^{+\infty} e^{-xn^\alpha}.$$

Or, d'après les questions précédentes, on a :

$$0 \leqslant \sum_{n=2}^{+\infty} e^{-xn^\alpha} \leqslant \int_1^{+\infty} e^{-xt^\alpha}dt = \underset{x\to+\infty}{o}\left(e^{-x}\right),$$

ce dont on déduit que : $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} e^{-xn^\alpha} = \underset{x\to+\infty}{o}\left(e^{-x}\right)$.

Finalement,

$$S_\alpha(x) - 1 = e^{-x} + \sum_{n=2}^{+\infty} e^{-xn^\alpha} = e^{-x} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(e^{-x}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} e^{-x}.$$

Problème II

1) Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des scalaires tels que $\lambda_1 e_1^* + \cdots + \lambda_n e_n^* = 0_{E^*}$. Pour tout i compris entre 1 et n, on peut évaluer cette égalité en e_i, par définition on obtient alors $\lambda_i = 0$. Cela montre que $\boxed{\text{la famille } (e_1^*, \ldots e_n^*) \text{ est libre}}$.

   C'est une famille de n vecteurs dans un espace vectoriel de dimension n car la dimension de E^* est égale à la dimension de E. On en déduit que $\boxed{\mathscr{B} \text{ est une base}}$.

2) Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ et $\varphi \in E^*$. La composée $\varphi \circ u$ est une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$ comme composée d'une application linéaire de E dans E et d' une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$.

   Soit λ_1, λ_2 dans $\mathbb{K}^2$ et φ_1, φ_2 deux formes linéaires,

$$(\lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2) \circ u = \lambda_1 \varphi_1 \circ u + \lambda_2 \varphi_2 \circ u$$

   Cela montre que $\boxed{\varphi \mapsto \varphi \circ u \text{ est un endomorphisme de } E^*}$.

3) Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Soit i, j dans $[\![1, n]\!]$, $u^T(e_j^*) = e_j^* \circ u$ et donc $u^T(e_j^*)(e_i) = e_j^*(u(e_i))$. Par définition de la matrice A, $u(e_i) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ki} e_k$ et donc $\boxed{u^T(e_j^*)(e_i) = a_{ji}}$.

   Cela montre que $u^T(e_j^*) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ji} e_i^*$. Finalement $\boxed{\mathsf{Mat}_{\mathscr{B}^*}(u^T) = A^T}$.

4) a) Pour tout $\varphi \in F^*$, $\operatorname{Ker}(\varphi)$ est un sous-espace vectoriel de E.

   Comme $(F^*)^\circ = \bigcap\limits_{\varphi \in F^*} \operatorname{Ker}(\varphi)$, c'est un sous-espace vectoriel en tant qu'intersection de sous-espaces vectoriels.

   b) Un exemple : soit φ et ψ dans $\mathscr{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ définies par

$$\varphi : (x_1, x_2, x_3) \mapsto x_1 + x_2 + x_3 \quad ; \quad \psi : (x_1, x_2, x_3) \mapsto x_1 - 3x_3$$

   Comme φ et ψ appartiennent à F^*, si $x \in (F^*)^\circ$, $\varphi(x) = \psi(x) = 0$.

   Réciproquement, soit $x \in E$ tel que $\varphi(x) = \psi(x) = 0$, pour tout $\theta \in F^*$, il existe λ, μ dans $\mathbb{K}$ tels que $\theta = \lambda\varphi + \mu\psi$ et donc $\theta(x) = \lambda 0 + \mu 0 = 0$. On a donc $x \in (F^*)^\circ$.

   On a donc $(F^*)^\circ = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{K}^3 \ , \ x_1 + x_2 + x_3 = x_1 - 3x_3 = 0\}$.

   On résout le système linéaire

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 & = & 0 \\ x_1 - 3x_3 & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcll} x_1 + x_2 + x_3 & = & 0 & \\ -x_2 - 4x_3 & = & 0 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x_1 & = & 3x_3 \\ x_2 & = & -4x_3 \end{array}\right.$$

   Finalement $\boxed{(F^*)^\circ = \operatorname{Vect}((3, -4, 1)) \text{ et } \dim(F^*)^\circ = 1}$.

   c) i) En procédant comme dans l'exemple ci-dessus, on obtient que

$$(F^*)^\circ = \bigcap_{i=1}^{r} \operatorname{Ker}(\varphi_i) = \operatorname{Ker}(\Phi)$$

Considérons une base $\mathscr{B}$ de E^* et $\mathscr{C}$ la base canonique de $\mathbb{K}^r$. La matrice de Φ dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$. Comme la famille $(\varphi_1, \ldots, \varphi_r)$ est libre, les lignes de la matrice sont linéairement indépendantes donc la matrice est de rang r. On obtient $\boxed{\mathrm{rg}(\Phi) = r}$.

ii) Par le théorème du rang on a donc $\dim(F^*)^\circ = \dim E - \mathrm{rg}(\Phi)$

Finalement $\boxed{\dim(F^*)^\circ = \dim E - r = \dim E - \dim F^*}$.

d) Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. On suppose que F^* est stable par u^T.

Soit $x \in (F^*)^\circ$, montrons que $u(x) \in (F^*)^\circ$. Pour cela, on considère $\varphi \in F^*$, on a alors

$$\varphi(u(x)) = (\varphi \circ u)(x) = u^T(\varphi)(x) = 0$$

La dernière égalité vient du fait que, F^* étant stable par u^T, $u^T(\varphi) \in F^*$.

On a montré que $\boxed{(F^*)^\circ \text{ est stable par } u}$.

5) a) i) Par définition, F est un sous-espace vectoriel de E. De plus pour tout i compris entre 0 et $p-2$, $u(u^i(x_0)) = u^{i+1}(x_0) \in F$ car $i+1 \leqslant p-1$ et $u(u^{p-1}(x_0)) = u^p(x_0) = 0 \in F$. On en déduit que F est stable par u.

Justifier que F est un sous-espace vectoriel de F stable par u.

ii) Par définition de F la famille $\mathscr{B}_{x_0} : (u^{p-1}(x_0), \ldots, x_0)$ engendre F. Il suffit donc de montrer qu'elle est libre. Soit $\lambda_0, \ldots, \lambda_{p-1}$ des scalaires tels que $\sum\limits_{i=0}^{p-1} \lambda_i u^i(x_0) = 0$. Supposons par l'absurde que les scalaires ne soient pas tous nuls et notons alors i_0 le plus petit entier tel que $\lambda_{i_0} \neq 0$. On compose la relation ci-dessus par u^{p-i_0-1} pour avoir

$$0 = u^{p-i_0-1}\left(\sum_{i=i_0}^{p-1} \lambda_i u^i(x_0)\right) = \sum_{i=i_0}^{p-1} \lambda_i u^{p-i_0-1+i}(x_0) = \lambda_{i_0} u^{p-1}(x_0)$$

car $u^j = 0$ pour $j \geqslant p$.

Comme on a supposé que $u^{p-1}(x_0) \neq 0$, on obtient $\lambda_{i_0} = 0$ ce qui est absurde.

Finalement $\mathscr{B}_{x_0}$ est libre et c'est donc une base de F.

iii) Si on note $\varepsilon_1 = u^{p-1}(x_0), \varepsilon_2 = u^{p-2}(x_0), \ldots, \varepsilon_p = x_0$ les vecteurs de $\mathscr{B}_{x_0}$. On a donc pour i compris entre 1 et p, $\varepsilon_i = u^{p-i}(x_0)$ et donc

$$u(\varepsilon_i) = u(u^{p-i}(x_0)) = u^{p-i+1}(x_0)$$

De ce fait,

$$u(\varepsilon_i) = \begin{cases} \varepsilon_{i-1} & \text{si } i > 1 \\ 0 & \text{si } i = 1 \end{cases}$$

La matrice de $\check{u}$ dans la base $\mathscr{B}_{x_0}$ est donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_{x_0}}(\check{u}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

b) On considère $\mathscr{B}$ une base de E et $\mathscr{B}^*$ la base duale associée, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}^*}(u^T) = (\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}^*}(u))^T$ d'après la question 3). Soit i un entier naturel et $\varphi \in E^*$,

Pour tout entier i,

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}^*}((u^T)^i) = (\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}^*}(u^T))^i = ((\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u))^T)^i = ((\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u))^i)^T = (\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u^i))^T = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}^*}((u^i)^T)$$

Donc, pour tout entier naturel i, $\boxed{(u^i)^T = (u^T)^i}$.

On remarque de plus que pour tout endomorphisme f de E, f est nul si et seulement si f^T est nul car une matrice est nulle si et seulement si sa transposée est nulle.

De ce fait, pour tout entier i, u^i est nul si et seulement si $(u^i)^T$ est nul. On en déduit que

$\boxed{u^T \text{ est nilpotent et l'indice de nilpotence de } u^T \text{ est égal à } p}$.

c) Soit φ une forme linéaire sur E telle que $\varphi(u^{p-1}(x_0)) \neq 0$. On considère le sous-espace vectoriel $G^* = \mathsf{Vect}(\varphi, u^T(\varphi), \ldots, (u^{p-1})^T(\varphi)) \subset E^*$

i) C'est la même preuve que 5a).

En particulier, $\dim G^* = p$ car $(\varphi, u^T(\varphi), \ldots, (u^{p-1})^T(\varphi))$ est une base de G^*.

ii) Considérons un élément y appartenant à $F \cap (G^*)^\circ$. Par définition, il s'écrit $y = \sum_{i=0}^{p-1} \lambda_i u^i(x_0)$.

Comme $y \in (G^*)^\circ$, $0 = (u^{p-1})^T(\varphi)(y) = \varphi(u^{p-1}(y)) = \lambda_0 \varphi(u^{p-1}(x_0))$.

Pour la dernière égalité on a utilisé que $u^i(x_0) = 0$ pour $i \geqslant p$. Or, $\varphi(u^{p-1}(x_0))$ n'est pas nul par hypothèses donc $\lambda_0 = 0$. On réapplique ce procédé en utilisant que $(u^{p-2})^T(\varphi)(y) = 0$ pour obtenir que $\lambda_1 = 0$. En continuant ainsi, on a $\lambda_0 = \cdots = \lambda_{p-1} = 0$ et donc $y = 0$.

Cela prouve que F et $(G^*)^\circ$ sont en somme directe.

On remarque alors que $\dim(G^*)^\circ = \dim E - \dim(G^*) = \dim E - p$ et donc $\dim F + \dim(G^*) = \dim E$. De ce fait $F \oplus (G^*)^\circ = E$.

6) On procède par récurrence sur la dimension n de l'espace E. Précisément pour tout entier non nul n on pose $\mathscr{P}(n)$: « pour tout espace vectoriel E de dimension n et tout endomorphisme nilpotent sur E d'indice de nilpotence p il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que la matrice de u dans la base $\mathscr{B}$ soit de la forme

$$\mathsf{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} J_{n_1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & J_{n_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & J_{n_q} \end{pmatrix}$$

où $1 \leqslant n_q \leqslant \cdots \leqslant n_1 \leqslant p$. »

— Initialisation : pour $n = 1$, si $\dim E = 1$ et u est nilpotent alors u est l'endomorphisme nul. Il existe une base telle que sa matrice dans cette base soit J_1 qui est la matrice nulle.

— Hérédité : soit $n \geqslant 2$. Par recurrence forte, on suppose que pour tout entier $k < n$, $\mathscr{P}(k)$ est vraie. Soit E un espace vectoriel de dimension n et u un endomorphisme nilpotent dont l'indice de nilpotence est noté p. D'après 5.a) on peut trouver un sous-espace stable F et une base $\mathscr{B}_1$ tels que la matrice de l'induit de u sur F dans la base $\mathscr{B}_1$ soit J_p. D'après 5.c), F admet un supplémentaire $(G^*)^\circ$ qui est stable par u. L'endomorphisme $\tilde{u}$ induit par u sur $(G^*)^\circ$ est encore nilpotent et son indice de nilpotence p' est inférieur ou égal à p. Soit $k = \dim(G^*)^\circ < n$. On peut appliquer $\mathscr{P}(k)$ pour déterminer une base $\mathscr{B}_2$ de $(G^*)^\circ$ telle que la matrice de $\tilde{u}$ dans cette base soit de la forme

$$\mathsf{Mat}_{\mathscr{B}_2}(\tilde{u}) = \begin{pmatrix} J_{n_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{n_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & J_{n_q} \end{pmatrix}$$

où $1 \leqslant n_q \leqslant \cdots \leqslant n_1 \leqslant p'$. En concaténant les bases $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$, on obtient une base $\mathscr{B}$ de E telle que

$$\mathsf{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} J_p & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{n_1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & J_{n_q} \end{pmatrix}$$

où $1 \leqslant n_q \leqslant \cdots \leqslant n_1 \leqslant p \leqslant p$. On vient donc de prouver $\mathscr{P}(n)$.

— Conclusion : pour tout entier n, $\mathscr{P}(n)$ est vrai

7) D'après ce qui précède, toute matrice nilpotente N de $\mathscr{M}_4(\mathbb{K})$ est semblable à une matrice par blocs avec des matrices $J_{n_1}, \dots, J_{n_q}$ sur la diagonale où $1 \leqslant n_q \leqslant \cdots \leqslant n_1$. La taille de la matrice J_r est r on doit donc avoir $n_1 + \cdots + n_q = 4$. Les seules possibilités pour le uplet $(n_1, \dots, n_q)$ sont donc $(4); (3,1); (2,2); (2,1,1); (1,1,1,1)$. On en déduit que N est donc semblable à l'une des 5 matrices suivantes.

$$N_1 = \underset{(4)}{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}} \quad N_2 = \underset{(3,1)}{\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)} \quad N_3 = \underset{(2,2)}{\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)}$$

$$N_4 = \underset{(2,1,1)}{\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)} \quad N_5 = \underset{(1,1,1,1)}{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

Il reste à montrer que ces matrices sont deux à deux non semblables. On a $\mathrm{rg}(N_5) = 0; \mathrm{rg}(N_4) = 1; \mathrm{rg}(N_3) = \mathrm{rg}(N_2) = 2$ et $\mathrm{rg}(N_1) = 3$. Il reste donc à montrer que N_2 et N_3 ne sont pas semblables. Il suffit pour cela de voir que $N_3^2 = 0$ alors que $N_2^2 \neq 0$.