Problème I

Partie I - Préliminaires

1) Comme f est continue sur $[0,1]$ et $x \longmapsto x - \lfloor x \rfloor$ est 1-périodique, continue sur $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ à valeurs dans $[0,1[$, $\tilde{f}$ est bien définie, $\boxed{\text{1-périodique}}$ et continue sur $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$. Enfin pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $\lim_{n^-} \tilde{f} = f(1) = f(0) = \lim_{n^+} \tilde{f} = \tilde{f}(n)$ et $\tilde{f}$ est continue en n et donc finalement $\boxed{\text{continue sur } \mathbb{R}}$.

2) Soit $\varepsilon > 0$. La fonction f restreinte à $[-1,1]$ est continue sur un segment donc uniformément continue par le théorème de Heine. Il existe $\eta > 0$ tel que $\forall x, y \in [-1,1]$ $|y - x| \leqslant \eta \Rightarrow |f(y) - f(x)| \leqslant \varepsilon$. Quitte à diminuer η, on peut supposer que $\eta \leqslant 1$. Soit $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $|y-x| \leqslant \eta$. Supposons $x \leqslant y$ et posons $n = \lfloor y \rfloor$. Alors $y' = y - n \in [0,1[$ et $x' = x - n \in [-\eta, 1[\subset [-1,1]$. De plus $|y' - x'| = |y - x| \leqslant \eta$. Il s'ensuit que

$$|f(y) - f(x)| = |f(y') - f(x')| \leqslant \varepsilon.$$

On en déduit que $\boxed{f \text{ est uniformément continue sur } \mathbb{R}}$.

3) Ultra classique théorème de Cesaro. On peut le démontrer en une ligne si on utilise le théorème de sommation des o : $z_n - z = o(1)$ et 1 est le terme général positif d'une série divergente donc $\sum_{n=0}^{N}(z_n - z) = o(N+1)$ et ainsi $\boxed{Z_N = z + o(1)}$.

Partie II - Théorème de Fejér et application

4) L'intégrale de e_k sur $[0,1]$ vaut 1 si $k=0$ et 0 sinon. Par linéarité de l'intégrale, $\displaystyle\int_0^1 K_N = \frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N} 1 = 1.$

5) Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=-n}^{n} e_k(x) = e_{-n}(x)\sum_{l=0}^{2n} e_l(x) = e_{-n}(x)\frac{1 - e_{2n+1}(x)}{1 - e_1(x)} = \frac{\sin\left((2n+1)\pi x\right)}{\sin \pi x},$$

après factorisation par le demi-angle. K_N est donc la partie imaginaire de

$$\frac{1}{(N+1)\sin \pi x}\sum_{n=0}^{N} e^{(2n+1)i\pi x} = \frac{e^{i\pi x}}{(N+1)\sin \pi x}\sum_{n=0}^{N}\left(e^{2i\pi x}\right)^n = \frac{e^{i\pi x}}{(N+1)\sin \pi x}\frac{1 - e^{2i(N+1)\pi x}}{1 - e^{2i\pi x}}$$

ce qui donne par factorisation par demi-angle

$$\frac{e^{i(N+1)\pi x}}{(N+1)\sin \pi x}\frac{\sin(N+1)\pi x}{\sin \pi x},$$

dont la partie imaginaire est bien $\boxed{\displaystyle\frac{1}{N+1}\left(\frac{\sin(N+1)\pi x}{\sin \pi x}\right)^2}$: c'est le noyau de Fejér.

6) a. Par linéarité de l'intégrale,

$$\sigma_N(f)(x) = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}\sum_{k=-n}^{n}\int_0^1 f(y)e_k(x-y)\mathrm{d}y = \boxed{\int_0^1 f(y)K_N(x-y)\mathrm{d}y}.$$

b. Par changement de variable $z = x - y$,

$$\sigma_N(f)(x) = \int_x^{x-1} f(x-z)K_N(z)(-dz) = \int_{x-1}^{x} f(x-z)K_N(z)dz = \boxed{\int_0^1 f(x-z)K_N(z)dz}$$

car la fonction $g : z \longmapsto f(x-z)K_N(z)$ est 1-périodique est continue donc la fonction $t \mapsto \int_t^{t+1} g(z)dz$ est constante puisque par le théorème fondamental de l'analyse sa dérivée est $t \mapsto g(t+1) - g(t) = 0$.

Comme $f(x) = \displaystyle\int_0^1 f(x)K_N(z)\mathrm{d}z$,

$$\boxed{\sigma_N(f)(x) - f(x) = \int_0^1 (f(x-z) - f(x))K_N(z)\mathrm{d}z,}$$

7) a. Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est uniformément continue par la question 2), il existe $\delta > 0$ tel que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $|y - x| \leqslant \delta \Rightarrow |f(y) - f(x)| \leqslant \varepsilon$. Quitte à diminuer δ, on peut supposer $\delta < \frac{1}{2}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y \in [0, \delta]$, $|f(x-y) - f(y)| \leqslant \varepsilon$ et donc comme $\boxed{K_N \text{ est positive}}$ sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ par la question 5) et sur $\mathbb{R}$ par continuité de K_N qui est combinaison linéaire des fonctions continues e_k, on a

$$\boxed{\int_0^\delta |f(x-y) - f(y)|K_n(y)\mathrm{d}y \leqslant \int_0^\delta \varepsilon K_n(y)\mathrm{d}y \leqslant \varepsilon \int_0^1 K_n(y)\mathrm{d}y = \varepsilon.}$$

De même si $y \in [1-\delta, 1]$, $y - 1 \in [-\delta, 0]$ et par périodicité,
$|f(x-y) - f(x)| = |f(x-(y-1)) - f(x)| \leqslant \varepsilon$ et on obtient de même l'autre inégalité.

b. Pour $\delta \leqslant y \leqslant 1 - \delta$, on a $\sin \pi y \geqslant \sin \pi\delta$ si bien que $K_n(y) \leqslant \frac{1}{(N+1)\sin^2(\pi\delta)}$. Ainsi,

$$\int_\delta^{1-\delta} |f(x-y) - f(x)|K_N(y)\mathrm{d}y \leqslant \int_\delta^{1-\delta} \frac{2\|f\|_\infty}{(N+1)\sin^2(\pi\delta)}\mathrm{d}y \leqslant \frac{\kappa_{\delta,f}}{N+1},$$

avec $\boxed{\kappa_{\delta,f} = \dfrac{2\|f\|_\infty}{\sin^2(\pi\delta)}}$ qui est bien indépendante de N et de x.

c. On fixe $\varepsilon > 0$ et l'on prend δ comme en 7)b). On a par découpage de l'intégrale par la relation de Chasles

$$|\sigma_N(f)(x) - f(x)| \leqslant \int_0^1 |f(x-y) - f(x)|K_N(y)\mathrm{d}y \leqslant 2\varepsilon + \frac{\kappa_{\delta,f}}{N+1}.$$

Il existe n_0 tel que si $N \geqslant n_0$, on a $\dfrac{\kappa_{\delta,f}}{N+1} \leqslant \varepsilon$. Ainsi si $N \geqslant n_0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\sigma_N(f)(x) - f(x)| \leqslant 3\varepsilon$, ce qui prouve la $\boxed{\text{convergence uniforme de } (\sigma_N(f))_N \text{ vers } f}$.

8) a. Soit $k \in \mathbb{Z}$. On a par intégration par parties

$$c_k(f') = \int_0^1 f'(y)e^{-2ik\pi y}\mathrm{d}y = \left[f(y)e^{-2ik\pi y}\right]_0^1 + 2ik\pi \int_0^1 f(y)e^{-2ik\pi y}\mathrm{d}y = 2ik\pi c_k(f).$$

Par récurrence immédiate, $\forall n \in \mathbb{N}$ $\boxed{c_k(f^{(n)}) = (2ik\pi)^n c_k(f)}$.

b. On a $|c_k(f)| \leqslant \displaystyle\int_0^1 |f(y)|\mathrm{d}y \leqslant \|f\|_\infty$. Avec $n = 2$ dans l'égalité précédente, on a donc $|c_k(f)| \leqslant \dfrac{\|f''\|_\infty}{4\pi^2k^2}$ pour $k \neq 0$.

Comme $\sum \frac{1}{k^2}$ converge, $\boxed{\text{les séries à termes positifs } \sum |c_k(f)| \text{ et } \sum |c_{-k}(f)| \text{ convergent}}$.

c. Les séries de fonctions $\sum c_k(f)e_k$ et $\sum c_{-k}(f)e_{-k}$ convergent normalement sur $\mathbb{R}$ (et donc uniformément) puisque pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $||c_k(f)e_k||_\infty = |c_k(f)|$.
Donc la suite $(S_n(f))$ converge uniformément vers $g : x \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} c_k(f)e_k(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} c_{-k}(f)e_{-k}(x)$.
Par le théorème de Cesaro (I.3)), pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(\sigma_n(f)(x))$ converge donc vers $g(x)$.
Mais aussi vers $f(x)$ par 7)c).
On en déduit que $f = g$ et que $\boxed{\text{la suite de fonction } (S_n(f)) \text{ converge uniformément vers } f}$.

Problème II

1) Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des scalaires tels que $\lambda_1 e_1^* + \cdots + \lambda_n e_n^* = 0_{E^*}$. Pour tout i compris entre 1 et n, on peut évaluer cette égalité en e_i, par définition on obtient alors $\lambda_i = 0$. Cela montre que $\boxed{\text{la famille } (e_1^*, \ldots e_n^*) \text{ est libre}}$.

   C'est une famille de n vecteurs dans un espace vectoriel de dimension n car la dimension de E^* est égale à la dimension de E. On en déduit que $\boxed{\mathscr{B} \text{ est une base}}$.

2) Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ et $\varphi \in E^*$. La composée $\varphi \circ u$ est une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$ comme composée d'une application linéaire de E dans E et d' une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$.

   Soit λ_1, λ_2 dans $\mathbb{K}^2$ et φ_1, φ_2 deux formes linéaires,

$$(\lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2) \circ u = \lambda_1 \varphi_1 \circ u + \lambda_2 \varphi_2 \circ u$$

   Cela montre que $\boxed{\varphi \mapsto \varphi \circ u \text{ est un endomorphisme de } E^*}$.

3) Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Soit i, j dans $[\![1, n]\!]$, $u^T(e_j^*) = e_j^* \circ u$ et donc $u^T(e_j^*)(e_i) = e_j^*(u(e_i))$. Par définition de la matrice A, $u(e_i) = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} e_k$ et donc $\boxed{u^T(e_j^*)(e_i) = a_{ji}}$.

   Cela montre que $u^T(e_j^*) = \sum_{k=1}^{n} a_{ji} e_i^*$. Finalement $\boxed{\mathsf{Mat}_{\mathscr{B}^*}(u^T) = A^T}$.

4) a) Pour tout $\varphi \in F^*$, $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est un sous-espace vectoriel de E.

      Comme $(F^*)^\circ = \bigcap_{\varphi \in F^*} \mathrm{Ker}(\varphi)$, c'est un sous-espace vectoriel en tant qu'intersection de sous-espaces vectoriels.

   b) Un exemple : soit φ et ψ dans $\mathscr{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ définies par

$$\varphi : (x_1, x_2, x_3) \mapsto x_1 + x_2 + x_3 \quad ; \quad \psi : (x_1, x_2, x_3) \mapsto x_1 - 3x_3$$

      Comme φ et ψ appartiennent à F^*, si $x \in (F^*)^\circ$, $\varphi(x) = \psi(x) = 0$.

      Réciproquement, soit $x \in E$ tel que $\varphi(x) = \psi(x) = 0$, pour tout $\theta \in F^*$, il existe λ, μ dans $\mathbb{K}$ tels que $\theta = \lambda\varphi + \mu\psi$ et donc $\theta(x) = \lambda 0 + \mu 0 = 0$. On a donc $x \in (F^*)^\circ$.

      On a donc $(F^*)^\circ = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{K}^3 \ , \ x_1 + x_2 + x_3 = x_1 - 3x_3 = 0\}$.

      On résout le système linéaire

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 & = & 0 \\ x_1 - 3x_3 & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 & = & 0 \\ -x_2 - 4x_3 & = & 0 \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x_1 & = & 3x_3 \\ x_2 & = & -4x_3 \end{array}\right.$$

      Finalement $\boxed{(F^*)^\circ = \mathrm{Vect}((3, -4, 1)) \text{ et } \dim(F^*)^\circ = 1}$.

   c) i) En procédant comme dans l'exemple ci-dessus, on obtient que

$$(F^*)^\circ = \bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{Ker}(\varphi_i) = \mathrm{Ker}(\Phi)$$

Considérons une base $\mathscr{B}$ de E^* et $\mathscr{C}$ la base canonique de $\mathbb{K}^r$. La matrice de Φ dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$. Comme la famille $(\varphi_1, \ldots, \varphi_r)$ est libre, les lignes de la matrice sont linéairement indépendantes donc la matrice est de rang r. On obtient $\boxed{\mathrm{rg}(\Phi) = r}$.

ii) Par le théorème du rang on a donc $\dim(F^*)^\circ = \dim E - \mathrm{rg}(\Phi)$

Finalement $\boxed{\dim(F^*)^\circ = \dim E - r = \dim E - \dim F^*}$.

d) Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. On suppose que F^* est stable par u^T.

Soit $x \in (F^*)^\circ$, montrons que $u(x) \in (F^*)^\circ$. Pour cela, on considère $\varphi \in F^*$, on a alors

$$\varphi(u(x)) = (\varphi \circ u)(x) = u^T(\varphi)(x) = 0$$

La dernière égalité vient du fait que, F^* étant stable par u^T, $u^T(\varphi) \in F^*$.

On a montré que $\boxed{(F^*)^\circ \text{ est stable par } u}$.

5) a) i) Par définition, F est un sous-espace vectoriel de E. De plus pour tout i compris entre 0 et $p-2$, $u(u^i(x_0)) = u^{i+1}(x_0) \in F$ car $i+1 \leqslant p-1$ et $u(u^{p-1}(x_0)) = u^p(x_0) = 0 \in F$. On en déduit que F est stable par u.

Justifier que F est un sous-espace vectoriel de F stable par u.

ii) Par définition de F la famille $\mathscr{B}_{x_0} : (u^{p-1}(x_0), \ldots, x_0)$ engendre F. Il suffit donc de montrer qu'elle est libre. Soit $\lambda_0, \ldots, \lambda_{p-1}$ des scalaires tels que $\sum\limits_{i=0}^{p-1} \lambda_i u^i(x_0) = 0$. Supposons par l'absurde que les scalaires ne soient pas tous nuls et notons alors i_0 le plus petit entier tel que $\lambda_{i_0} \neq 0$. On compose la relation ci-dessus par u^{p-i_0-1} pour avoir

$$0 = u^{p-i_0-1}\left(\sum_{i=i_0}^{p-1} \lambda_i u^i(x_0)\right) = \sum_{i=i_0}^{p-1} \lambda_i u^{p-i_0-1+i}(x_0) = \lambda_{i_0} u^{p-1}(x_0)$$

car $u^j = 0$ pour $j \geqslant p$.

Comme on a supposé que $u^{p-1}(x_0) \neq 0$, on obtient $\lambda_{i_0} = 0$ ce qui est absurde.

Finalement $\mathscr{B}_{x_0}$ est libre et c'est donc une base de F.

iii) Si on note $\varepsilon_1 = u^{p-1}(x_0), \varepsilon_2 = u^{p-2}(x_0), \ldots, \varepsilon_p = x_0$ les vecteurs de $\mathscr{B}_{x_0}$. On a donc pour i compris entre 1 et p, $\varepsilon_i = u^{p-i}(x_0)$ et donc

$$u(\varepsilon_i) = u(u^{p-i}(x_0)) = u^{p-i+1}(x_0)$$

De ce fait,

$$u(\varepsilon_i) = \begin{cases} \varepsilon_{i-1} & \text{si } i > 1 \\ 0 & \text{si } i = 1 \end{cases}$$

La matrice de $\breve{u}$ dans la base $\mathscr{B}_{x_0}$ est donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_{x_0}}(\breve{u}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

b) On considère $\mathscr{B}$ une base de E et $\mathscr{B}^*$ la base duale associée, $\text{Mat}_{\mathscr{B}^*}(u^T) = (\text{Mat}_{\mathscr{B}^*}(u))^T$ d'après la question 3).Soit i un entier naturel et $\varphi \in E^*$,

Pour tout entier i,

$$\text{Mat}_{\mathscr{B}^*}((u^T)^i) = (\text{Mat}_{\mathscr{B}^*}(u^T))^i = ((\text{Mat}_{\mathscr{B}}(u))^T)^i = ((\text{Mat}_{\mathscr{B}}(u))^i)^T = (\text{Mat}_{\mathscr{B}}(u^i))^T = \text{Mat}_{\mathscr{B}^*}((u^i)^T)$$

Donc, pour tout entier naturel i, $\boxed{(u^i)^T = (u^T)^i}$.

On remarque de plus que pour tout endomorphisme f de E, f est nul si et seulement si f^T est nul car une matrice est nulle si et seulement si sa transposée est nulle.

De ce fait, pour tout entier i, u^i est nul si et seulement si $(u^i)^T$ est nul. On en déduit que

$\boxed{u^T \text{ est nilpotent et l'indice de nilpotence de } u^T \text{ est égal à } p}$.

c) Soit φ une forme linéaire sur E telle que $\varphi(u^{p-1}(x_0)) \neq 0$. On considère le sous-espace vectoriel $G^* = \mathsf{Vect}(\varphi, u^T(\varphi), \ldots, (u^{p-1})^T(\varphi)) \subset E^*$

i) C'est la même preuve que 5a).

En particulier, $\dim G^* = p$ car $(\varphi, u^T(\varphi), \ldots, (u^{p-1})^T(\varphi))$ est une base de G^*.

ii) Considérons un élément y appartenant à $F \cap (G^*)^\circ$. Par définition, il s'écrit $y = \sum\limits_{i=0}^{p-1} \lambda_i u^i(x_0)$.

Comme $y \in (G^*)^\circ$, $0 = (u^{p-1})^T(\varphi)(y) = \varphi(u^{p-1}(y)) = \lambda_0 \varphi(u^{p-1}(x_0))$.

Pour la dernière égalité on a utilisé que $u^i(x_0) = 0$ pour $i \geqslant p$. Or, $\varphi(u^{p-1}(x_0))$ n'est pas nul par hypothèses donc $\lambda_0 = 0$. On réapplique ce procédé en utilisant que $(u^{p-2})^T(\varphi)(y) = 0$ pour obtenir que $\lambda_1 = 0$. En continuant ainsi, on a $\lambda_0 = \cdots = \lambda_{p-1} = 0$ et donc $y = 0$.

Cela prouve que F et $(G^*)^\circ$ sont en somme directe.

On remarque alors que $\dim(G^*)^\circ = \dim E - \dim(G^*) = \dim E - p$ et donc $\dim F + \dim(G^*) = \dim E$. De ce fait $F \oplus (G^*)^\circ = E$.

6) On procède par récurrence sur la dimension n de l'espace E. Précisément pour tout entier non nul n on pose $\mathscr{P}(n)$: « pour tout espace vectoriel E de dimension n et tout endomorphisme nilpotent sur E d'indice de nilpotence p il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que la matrice de u dans la base $\mathscr{B}$ soit de la forme

$$\mathsf{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} J_{n_1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & J_{n_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & J_{n_q} \end{pmatrix}$$

où $1 \leqslant n_q \leqslant \cdots \leqslant n_1 \leqslant p$. »

— Initialisation : pour $n = 1$, si $\dim E = 1$ et u est nilpotent alors u est l'endomorphisme nul. Il existe une base telle que sa matrice dans cette base soit J_1 qui est la matrice nulle.

— Hérédité : soit $n \geqslant 2$. Par recurrence forte, on suppose que pour tout entier $k < n$, $\mathscr{P}(k)$ est vraie. Soit E un espace vectoriel de dimension n et u un endomorphisme nilpotent dont l'indice de nilpotence est noté p. D'après 5.a) on peut trouver un sous-espace stable F et une base $\mathscr{B}_1$ tels que la matrice de l'induit de u sur F dans la base $\mathscr{B}_1$ soit J_p. D'après 5.c), F admet un supplémentaire $(G^*)^\circ$ qui est stable par u. L'endomorphisme $\tilde{u}$ induit par u sur $(G^*)^\circ$ est encore nilpotent et son indice de nilpotence p' est inférieur ou égal à p. Soit $k = \dim(G^*)^\circ < n$. On peut appliquer $\mathscr{P}(k)$ pour déterminer une base $\mathscr{B}_2$ de $(G^*)^\circ$ telle que la matrice de $\tilde{u}$ dans cette base soit de la forme

$$\mathsf{Mat}_{\mathscr{B}_2}(\tilde{u}) = \begin{pmatrix} J_{n_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{n_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & J_{n_q} \end{pmatrix}$$

où $1 \leqslant n_q \leqslant \cdots \leqslant n_1 \leqslant p'$. En concaténant les bases $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$, on obtient une base $\mathscr{B}$ de E telle que

$$\mathsf{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} J_p & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{n_1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & J_{n_q} \end{pmatrix}$$

où $1 \leqslant n_q \leqslant \cdots \leqslant n_1 \leqslant p \leqslant p$. On vient donc de prouver $\mathscr{P}(n)$.

— Conclusion : pour tout entier n, $\mathscr{P}(n)$ est vrai

7) D'après ce qui précède, toute matrice nilpotente N de $\mathscr{M}_4(\mathbb{K})$ est semblable à une matrice par blocs avec des matrices $J_{n_1}, \dots, J_{n_q}$ sur la diagonale où $1 \leqslant n_q \leqslant \cdots \leqslant n_1$. La taille de la matrice J_r est r on doit donc avoir $n_1 + \cdots + n_q = 4$. Les seules possibilités pour le uplet $(n_1, \dots, n_q)$ sont donc $(4); (3,1); (2,2); (2,1,1); (1,1,1,1)$. On en déduit que N est donc semblable à l'une des 5 matrices suivantes.

$$N_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad N_2 = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad N_3 = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(4) $\qquad$ $(3,1)$ $\qquad$ $(2,2)$

$$N_4 = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad N_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$(2,1,1)$ $\qquad$ $(1,1,1,1)$

Il reste à montrer que ces matrices sont deux à deux non semblables. On a $\mathrm{rg}(N_5) = 0; \mathrm{rg}(N_4) = 1; \mathrm{rg}(N_3) = \mathrm{rg}(N_2) = 2$ et $\mathrm{rg}(N_1) = 3$. Il reste donc à montrer que N_2 et N_3 ne sont pas semblables. Il suffit pour cela de voir que $N_3^2 = 0$ alors que $N_2^2 \neq 0$.