Calculatrices interdites.

Les deux problèmes sont indépendants. L'énoncé comporte quatre pages.

Problème I

Pour tout $y \in \mathbf{R}$, on notera $\lfloor y \rfloor$ la partie entière de y, c'est-à-dire l'unique entier relatif $\lfloor y \rfloor \in \mathbf{Z}$ tel que $\lfloor y \rfloor \leqslant y < \lfloor y \rfloor + 1$.

Pour tout $z \in \mathbf{C}$, on notera $|z|$ le module de z.

On dira qu'une fonction continue $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ est périodique de période $T > 0$ si pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a $f(x+T) = f(x)$. Dans ce problème, on supposera toujours que $T = 1$ et on dira simplement qu'une fonction continue $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ est périodique si pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a $f(x+1) = f(x)$.

On notera $\mathcal{C}_{\text{per}}$ l'espace vectoriel de toutes les fonctions $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ continues et périodiques muni de la norme $\| \cdot \|_\infty$ définie par

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbf{R}} |f(x)|$$

Si $f \in \mathcal{C}_{\text{per}}$ est une fonction continue et périodique que l'on suppose de plus de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$, on notera $f^{(m)}$ pour tout $m \in \mathbf{N}$, la dérivée m-ième de f qui appartient encore à l'espace $\mathcal{C}_{\text{per}}$. On rappelle qu'une suite $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de fonctions de $\mathcal{C}_{\text{per}}$ converge uniformément vers $f \in \mathcal{C}_{\text{per}}$ lorsque $\lim_{n \to +\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$. Pour tout $k \in \mathbf{Z}$, on notera $e_k \in \mathcal{C}_{\text{per}}$ la fonction définie par

$$e_k(x) = \exp(2\pi \mathrm{i} k x) \quad \text{pour tout } x \in \mathbf{R}$$

Soit une fonction $f \in \mathcal{C}_{\text{per}}$. Pour tout $k \in \mathbf{Z}$, on définit $c_k(f) \in \mathbf{C}$, le k-ième coefficient de Fourier de f, par

$$c_k(f) = \int_0^1 f(y) e_{-k}(y) \mathrm{d}y$$

Pour tous $n, N \in \mathbf{N}$, on définit les fonctions $S_n(f) \in \mathcal{C}_{\text{per}}$ et $\sigma_N(f) \in \mathcal{C}_{\text{per}}$ par

$$S_n(f) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) e_k \quad \text{et} \quad \sigma_N(f) = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^{N} S_n(f)$$

Partie I - Préliminaires

Le but de cette partie est d'étabir des résultats préliminaires qui seront utiles dans la partie II.

1) Soit $f : [0,1] \to \mathbf{C}$ une fonction continue telle que $f(0) = f(1)$. Soit $\widetilde{f} : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ la fonction définie par $\widetilde{f}(x) = f(x - \lfloor x \rfloor)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$. Montrer que $\widetilde{f} \in \mathcal{C}_{\text{per}}$
2) Montrer que toute fonction $f \in \mathcal{C}_{\text{per}}$ est uniformément continue sur $\mathbf{R}$.
3) Soit $(z_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de nombres complexes qui converge vers $z \in \mathbf{C}$. Montrer que la suite de nombres complexes $(Z_N)_{N \in \mathbf{N}}$ definie par

$$Z_N = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^{N} z_n$$

converge aussi vers z.

Partie II - Théorème de Fejér et application

Le but de cette partie est de démontrer le Théorème de Fejér qui affirme que toute fonction $f \in \mathcal{C}_{\text{per}}$ est la limite uniforme de la suite de polynômes trigonométriques $(S_n(f))_{n\in\mathbf{N}}$ Pour tout $N \in \mathbf{N}$, on définit la fonction $K_N \in \mathcal{C}_{\text{per}}$ par

$$K_N = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}\sum_{k=-n}^{n} e_k$$

4) Soit $N \in \mathbf{N}$. Montrer que

$$\int_0^1 K_N(y)\mathrm{d}y = 1$$

5) Soient $N \in \mathbf{N}$ et $x \in \mathbf{R}\backslash\mathbf{Z}$. Montrer que

$$K_N(x) = \frac{1}{N+1}\left(\frac{\sin((N+1)\pi x)}{\sin(\pi x)}\right)^2$$

6) Soit $f \in \mathcal{C}_{\text{per}}$. Soient $N \in \mathbf{N}$ et $x \in \mathbf{R}$.

   a) Montrer que

   $$\sigma_N(f)(x) = \int_0^1 f(y)K_N(x-y)\mathrm{d}y$$

   b) En déduire que

   $$\sigma_N(f)(x) - f(x) = \int_0^1 (f(x-y)-f(x))K_N(y)\mathrm{d}y$$

7) Théorème de Fejér. Soit $f \in \mathcal{C}_{\text{per}}$.

   a) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $0 < \delta < \frac{1}{2}$ tel que pour tout $N \in \mathbf{N}$ et tout $x \in \mathbf{R}$, on a

   $$\int_0^\delta |f(x-y)-f(x)|K_N(y)\mathrm{d}y \leqslant \varepsilon \quad \text{et} \quad \int_{1-\delta}^1 |f(x-y)-f(x)|K_N(y)\mathrm{d}y \leqslant \varepsilon$$

   b) Montrer que pour tout $\delta \in]0, \frac{1}{2}]$, il existe une constante $\kappa_{\delta,f} > 0$ (qui dépend de δ et de f) telle que pour tout $N \in \mathbf{N}$ et pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a

   $$\int_\delta^{1-\delta} |f(x-y)-f(x)|K_N(y)\mathrm{d}y \leqslant \frac{\kappa_{\delta,f}}{N+1}$$

   c) En déduire que la suite de fonctions $(\sigma_N(f))_{N\geqslant 1}$ converge uniformément vers f

8) Soit $f \in \mathcal{C}_{\text{per}}$ une fonction que l'on suppose de plus de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$.

   a) Soient $k \in \mathbf{Z}$ et $n \in \mathbf{N}$. Établir une relation entre les coefficients de Fourier $c_k(f)$ et $c_k\left(f^{(n)}\right)$

   b) En déduire que les séries $\sum\limits_{k\geqslant 0} c_k(f)$ et $\sum\limits_{k\geqslant 0} c_{-k}(f)$ convergent absolument.

   c) Montrer que la suite de fonctions $(S_n(f))_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément vers f.

Problème II

Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie. On rappelle que l'on note $E^* = \mathscr{L}(E, \mathbf{K})$ le $\mathbf{K}$-espace vectoriel des formes linéaires définies sur E.
Pour tous entiers i et j, on note δ_{ij} par

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. On rappelle que l'on définit les formes linéaires $e_1^*, \ldots, e_n^*$ par

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$$

Partie I - Préliminaires

1) Montrer que $(e_1^*, \ldots e_n^*)$ est une famille libre de E^*. En déduire que $\mathscr{B}^* = (e_1^*, \ldots, e_n^*)$ est une base de E^*.
2) Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ et $\varphi \in E^*$. Justifier que $\varphi \circ u$ est une forme linéaire sur E et que $\varphi \mapsto \varphi \circ u$ est un endomorphisme de E^*. Nous le noterons u^T.
3) Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. On note $A = (a_{ij})$ la matrice de u dans la base $\mathscr{B}$.
   Calculer $u^T(e_j^*)(e_i)$ pour i et j dans $[\![1,n]\!]$. En déduire $\mathsf{Mat}_{\mathscr{B}^*}(u^T)$.
4) Soit F^* un sous-espace vectoriel de E^*, on pose

$$(F^*)^\circ = \{x \in E \ ,\ \forall \varphi \in F^*, \varphi(x) = 0\}$$

   Ici, la notation F^* ne désigne pas $\mathscr{L}(F, \mathbf{K})$ pour un sous-espace vectoriel F de E ; cette notation est utilisée pour rappeler que c'est un sous-espace de E^*. Aucun sous-espace vectoriel F de E n'est introduit par cette notation.

   a) Montrer que $(F^*)^\circ$ est un sous-espace vectoriel de E.
   b) Un exemple : soit φ et ψ dans $\mathscr{L}(\mathbf{R}^3, \mathbf{R})$ définies par

$$\varphi : (x_1, x_2, x_3) \mapsto x_1 + x_2 + x_3 \quad ; \quad \psi : (x_1, x_2, x_3) \mapsto x_1 - 3x_3$$

   On pose $F^* = \mathsf{Vect}(\varphi, \psi)$. Montrer que pour $x \in \mathbf{R}^3$, $x \in (F^*)^\circ$ si et seulement si $\varphi(x) = \psi(x) = 0$. En déduire explicitement $(F^*)^\circ$ et sa dimension.

   On revient au cas général.

   c) Soit F^* un sous-espace de E^* de dimension r et $(\varphi_1, \ldots, \varphi_r)$ une base de F^*. On considère l'application linéaire :

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & E & \to & \mathbf{K}^r \\ & x & \mapsto & (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_r(x)) \end{array}$$

      i) Déterminer le rang de Φ.
      ii) En déduire la dimension de $(F^*)^\circ$ en fonction de celle de F^*

   d) Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. On suppose que F^* est stable par u^T, montrer que $(F^*)^\circ$ est stable par u.

Partie II - Réduction de Jordan

5) Soit u un endomorphisme de E nilpotent. On note $p \in [\![1, n]\!]$ son indice de nilpotence et on considère $x_0 \in E$ tel que $u^{p-1}(x_0) \neq 0$.

   a) On note $F = \mathsf{Vect}(x_0, \ldots, u^{p-1}(x_0))$

      i) Justifier que F est un sous-espace vectoriel de E stable par u.

      ii) Montrer que $\mathscr{B}_{x_0} : (u^{p-1}(x_0), \ldots, x_0)$ est une base de F.

      iii) Déterminer la matrice de $\breve{u}$ l'endomorphisme induit par u sur F dans la base $\mathscr{B}_{x_0}$

   b) Montrer que pour tout entier naturel i, $(u^i)^T = (u^T)^i$. En déduire que u^T est nilpotent et donner son indice de nilpotence.

   c) Soit φ une forme linéaire sur E telle que $\varphi(u^{p-1}(x_0)) \neq 0$. On considère le sous-espace vectoriel $G^* = \mathsf{Vect}(\varphi, u^T(\varphi), \ldots, (u^{p-1})^T(\varphi)) \subset E^*$

      i) Montrer que G^* est stable par u^T et déterminer la dimension de G^*.

      ii) Montrer que F et $(G^*)^\circ$ sont en somme directe. En déduire qu'ils sont supplémentaires.

6) Pour tout entier r entier naturel non nul, on note $J_r \in \mathscr{M}_r(\mathbf{K})$ la matrice

$$J_r = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Montrer que pour tout endomorphisme u nilpotent, il existe une base $\mathscr{B}$ telle que la matrice de u dans la base $\mathscr{B}$ s'écrive en blocs

$$\mathsf{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} J_{n_1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & J_{n_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & J_{n_q} \end{pmatrix}$$

avec $n_1, \ldots, n_q$ des entiers tels que $1 \leqslant n_q \leqslant \cdots \leqslant n_1$.

7) En déduire le nombre de classes d'équivalence pour la relation de similitude sur l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathscr{M}_4(\mathbf{K})$.

   C'est-à-dire déterminer le plus grand entier naturel s pour lequel on peut trouver des matrices $M_1, \ldots, M_s$ nilpotentes de $\mathscr{M}_4(\mathbf{K})$ qui ne sont deux à deux non semblables ?