Calculatrices interdites.
Les deux problèmes sont indépendants. L'énoncé comporte quatre pages.

Problème I

Pour tout réel *strictement positif* α, on se propose d'étudier la fonction S_α de la variable réelle x définie (sous réserve de convergence) comme somme de la série de fonctions suivante :

$$S_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-xn^\alpha} = 1 + e^{-x} + e^{-2^\alpha x} + e^{-3^\alpha x} + e^{-4^\alpha x} + \cdots .$$

On étudie dans la partie I le domaine de définition et les premières propriétés de la fonction S_α. On introduit dans la partie II des intégrales auxiliaires afin d'obtenir le comportement asymptotique de $S_\alpha(x)$ lorsque x tend vers 0 et $+\infty$.

Partie I - Premières propriétés des fonctions S_α

1) *Étude du cas particulier de la fonction S_1.*

   a) Étudier la convergence simple et expliciter la somme de la série de fonctions définissant S_1 :
   $$S_1(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-xn}.$$

   b) Préciser la limite et un équivalent de $S_1(x)$ quand x tend vers 0.

   c) Préciser la limite de $S_1(x)$ quand x tend vers $+\infty$, et un équivalent de $S_1(x) - 1$ en $+\infty$.

2) *Étude du domaine de définition des fonctions S_α ($\alpha > 0$).*

   a) Examiner pour $x \leqslant 0$ la nature de la série $\sum_{n \geqslant 0} e^{-xn^\alpha}$.

   b) Pour tout réel $x > 0$, déterminer la limite de la suite $n \mapsto n^2 e^{-xn^\alpha}$.
   En déduire la nature de la série $\sum_{n \geqslant 0} e^{-xn^\alpha}$ pour $x > 0$.

   c) Préciser le domaine de définition de la fonction S_α pour $\alpha > 0$.

3) *Premières propriétés des fonctions S_α ($\alpha > 0$).*

   a) Pour tout $\varepsilon > 0$, établir la convergence normale de la série de fonctions $\sum_{n \geqslant 0} \left(x \mapsto e^{-xn^\alpha}\right)$ sur $[\varepsilon, +\infty[$. En déduire la continuité de la fonction S_α sur $]0, +\infty[$.

   b) Montrer que : $\lim_{x \to +\infty} S_\alpha(x) = 1$.

   c) Comparer $S_\alpha(x)$ et $S_\alpha(y)$ pour $0 < x \leqslant y$ et préciser le sens de variation de la fonction S_α.
   En déduire que la fonction S_α admet une limite finie ou infinie en 0^+.

   d) Soit $x > 0$ et N un entier naturel. Justifier que $S_\alpha(x) \geqslant \sum_{n=0}^{N} e^{-xn^\alpha}$.
   Quelle est la limite de $S_\alpha(x)$ quand x tend vers 0^+ ?

Partie II - Étude de $S_\alpha(x)$ quand x tend vers 0 et $+\infty$

4) *Comparaison de deux intégrales.*

On considère pour tous réels $\alpha > 0$ et $x > 0$ les deux intégrales suivantes :

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{\alpha-1} du, \quad \text{et} \quad I(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-xt^\alpha} dt.$$

a) Montrer que l'intégrale $\Gamma(\alpha)$ converge. (On rappelle que $\alpha > 0$).

b) À l'aide d'une intégration par parties, exprimer $\Gamma(\alpha+1)$ en fonction de $\Gamma(\alpha)$.
Calculer $\Gamma(1)$ et en déduire $\Gamma(n+1)$ pour tout entier naturel n.

c) Pour tout $x > 0$, effectuer dans l'intégrale $\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)$ le changement de variables défini par $u = xt^\alpha$.
Qu'en déduit-on pour l'intégrale $I(\alpha)$, et quelle relation obtient-on entre $\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)$ et $I(\alpha)$?

5) *Recherche d'un équivalent de S_α en 0 ($\alpha > 0$).*

a) En utilisant une comparaison série-intégrale, établir pour $\alpha > 0$ et $x > 0$ l'inégalité suivante :

$$0 \leqslant S_\alpha(x) - \frac{1}{\alpha}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)\frac{1}{x^{\frac{1}{\alpha}}} \leqslant 1.$$

b) Retrouver $\lim\limits_{x\to 0^+} S_\alpha(x)$ puis donner un équivalent de $S_\alpha(x)$ pour $x \to 0^+$.

6) *Majoration d'une intégrale auxiliaire ($\alpha > 0$).*

a) Justifier pour tous réels $\alpha > 0$ et $x > 0$ la relation suivante :

$$\int_1^{+\infty} e^{-xt^\alpha} dt = \frac{1}{\alpha x^{\frac{1}{\alpha}}} \int_x^{+\infty} e^{-u} u^{\frac{1}{\alpha}-1} du.$$

b) Établir l'égalité suivante pour tous réels $\alpha > 0$ et $x > 0$:

$$\int_x^{+\infty} e^{-u} u^{\frac{1}{\alpha}-1} du = e^{-x} x^{\frac{1}{\alpha}-1} + \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) \int_x^{+\infty} e^{-u} u^{\frac{1}{\alpha}-2} du.$$

c) En déduire l'équivalence suivante lorsque x tend vers $+\infty$:

$$\int_x^{+\infty} e^{-u} u^{\frac{1}{\alpha}-1} du \underset{x\to+\infty}{\sim} e^{-x} x^{\frac{1}{\alpha}-1}.$$

On pourra utiliser l'intégration des relations de comparaison.

d) En conclure que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-xt^\alpha} dt$ est négligeable devant e^{-x} lorsque x tend vers $+\infty$.

7) *Étude asymptotique de S_α en $+\infty$ ($\alpha > 0$).*

a) Établir pour $\alpha > 0$ et $x > 0$ l'inégalité suivante :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} e^{-xn^2} \leqslant \int_1^{+\infty} e^{-xt^\alpha} dt.$$

b) En déduire un équivalent de $S_\alpha(x) - 1$ quand x tend vers $+\infty$.

Problème II

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. On rappelle que l'on note $E^* = \mathscr{L}(E, \mathbb{K})$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des formes linéaires définies sur E.
Pour tous entiers i et j, on note δ_{ij} par

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. On rappelle que l'on définit les formes linéaires $e_1^*, \ldots, e_n^*$ par

$$\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2,\ e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$$

Partie I - Préliminaires

1) Montrer que $(e_1^*, \ldots e_n^*)$ est une famille libre de E^*. En déduire que $\mathscr{B}^* = (e_1^*, \ldots, e_n^*)$ est une base de E^*.
2) Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ et $\varphi \in E^*$. Justifier que $\varphi \circ u$ est une forme linéaire sur E et que $\varphi \mapsto \varphi \circ u$ est un endomorphisme de E^*. Nous le noterons u^T.
3) Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. On note $A = (a_{ij})$ la matrice de u dans la base $\mathscr{B}$.
   Calculer $u^T(e_j^*)(e_i)$ pour i et j dans $[\![1, n]\!]$. En déduire $\mathsf{Mat}_{\mathscr{B}^*}(u^T)$.
4) Soit F^* un sous-espace vectoriel de E^*, on pose

$$(F^*)^\circ = \{x \in E\ ,\ \forall \varphi \in F^*, \varphi(x) = 0\}$$

   Ici, la notation F^* ne désigne pas $\mathscr{L}(F, \mathbb{K})$ pour un sous-espace vectoriel F de E ; cette notation est utilisée pour rappeler que c'est un sous-espace de E^*. Aucun sous-espace vectoriel F de E n'est introduit par cette notation.

   a) Montrer que $(F^*)^\circ$ est un sous-espace vectoriel de E.
   b) Un exemple : soit φ et ψ dans $\mathscr{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ définies par

$$\varphi : (x_1, x_2, x_3) \mapsto x_1 + x_2 + x_3 \quad ; \quad \psi : (x_1, x_2, x_3) \mapsto x_1 - 3x_3$$

   On pose $F^* = \mathsf{Vect}(\varphi, \psi)$. Montrer que pour $x \in \mathbb{R}^3$, $x \in (F^*)^\circ$ si et seulement si $\varphi(x) = \psi(x) = 0$. En déduire explicitement $(F^*)^\circ$ et sa dimension.

   On revient au cas général.

   c) Soit F^* un sous-espace de E^* de dimension r et $(\varphi_1, \ldots, \varphi_r)$ une base de F^*. On considère l'application linéaire :

$$\Phi : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{K}^r \\ x & \mapsto & (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_r(x)) \end{array}$$

      i) Déterminer le rang de Φ.
      ii) En déduire la dimension de $(F^*)^\circ$ en fonction de celle de F^*
   d) Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. On suppose que F^* est stable par u^T, montrer que $(F^*)^\circ$ est stable par u.

Partie II - Réduction de Jordan

5) Soit u un endomorphisme de E nilpotent. On note $p \in [\![1, n]\!]$ son indice de nilpotence et on considère $x_0 \in E$ tel que $u^{p-1}(x_0) \neq 0$.

   a) On note $F = \mathsf{Vect}(x_0, \dots, u^{p-1}(x_0))$

      i) Justifier que F est un sous-espace vectoriel de E stable par u.

      ii) Montrer que $\mathscr{B}_{x_0} : (u^{p-1}(x_0), \dots, x_0)$ est une base de F.

      iii) Déterminer la matrice de $\breve{u}$ l'endomorphisme induit par u sur F dans la base $\mathscr{B}_{x_0}$

   b) Montrer que pour tout entier naturel i, $(u^i)^T = (u^T)^i$. En déduire que u^T est nilpotent et donner son indice de nilpotence.

   c) Soit φ une forme linéaire sur E telle que $\varphi(u^{p-1}(x_0)) \neq 0$. On considère le sous-espace vectoriel $G^* = \mathsf{Vect}(\varphi, u^T(\varphi), \dots, (u^{p-1})^T(\varphi)) \subset E^*$

      i) Montrer que G^* est stable par u^T et déterminer la dimension de G^*.

      ii) Montrer que F et $(G^*)^\circ$ sont en somme directe. En déduire qu'ils sont supplémentaires.

6) Pour tout entier r entier naturel non nul, on note $J_r \in \mathscr{M}_r(\mathbb{K})$ la matrice

$$J_r = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

   Montrer que pour tout endomorphisme u nilpotent, il existe une base $\mathscr{B}$ telle que la matrice de u dans la base $\mathscr{B}$ s'écrive en blocs

$$\mathsf{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} J_{n_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{n_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & J_{n_q} \end{pmatrix}$$

   avec $n_1, \dots, n_q$ des entiers tels que $1 \leqslant n_q \leqslant \cdots \leqslant n_1$.

7) En déduire le nombre de classes d'équivalence pour la relation de similitude sur l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathscr{M}_4(\mathbb{K})$.

   C'est-à-dire déterminer le plus grand entier naturel s pour lequel on peut trouver des matrices $M_1, \dots, M_s$ nilpotentes de $\mathscr{M}_4(\mathbb{K})$ qui ne sont deux à deux non semblables ?