

Normes

Définition d'une norme sur un espace vectoriel.

Norme euclidienne sur un espace préhilbertien réel; extension au cas des espaces préhilbertien complexe

Norme 1 et norme ∞ : $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_\infty$ sur \mathbf{K}^n ; $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_\infty$ sur un espace de fonctions

Norme produit sur un produit d'espaces vectoriels normés

Distance

Définition d'une distance

Distance associée à une norme

Boules

Boules ouvertes, boules fermées, sphères

Les boules sont convexes

Partie / suite / fonction bornée. Une partie est bornée si et seulement si elle est inclus dans une boule.

Normes équivalentes

Définition de normes équivalentes.

Invariance du caractère borné.

Exemple

Suites

Convergence. Unicité de la limite.

La suite (u_n) converge vers ℓ ssi $(\|u_n - \ell\|)$ tend vers 0.

Cas de la norme produit.

Toute suite convergente est bornée.

Limite d'une somme, compatibilité à la multiplication externe.

Compatibilité de la limite au produit dans le cas d'une algèbre \mathcal{A} muni d'une norme $\|\cdot\|$ tel qu'il existe une constante C vérifiant : $\forall x, y \in \mathcal{A}^2, \|x \times y\| \leq C\|x\| \cdot \|y\|$

Applications lipschitziennes

Définition d'une application lipschitzienne

Si (u_n) tend vers ℓ et que f est lipschitzienne, la suite $(f(u_n))$ tend vers $f(\ell)$

Si f est linéaire, elle est lipschitzienne si et seulement s'il existe k tel que $\forall x \in E, \|f(x)\| \leq k\|x\|$.

On a admis qu'en dimension finie toutes les normes sont équivalentes et que toutes les applications linéaires sont lipschitziennes.

La notion de norme subordonnée n'est pas au programme; on a cependant traité des exemples où on l'on cherche la meilleure constante k telle que $\|f(x)\| \leq k\|x\|$