1. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Corrigé

a) La matrice A a exactement deux valeurs propres distinctes — ☑ Vrai ☐ Faux

b) Le sous-espace associé à la valeur propre 2 est de dimension 2 — ☐ Vrai ☑ Faux

c) La matrice est semblable à $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ — ☐ Vrai ☑ Faux

d) Quel est le degré de π_A ? — ☐ 1 ☐ 2 ☑ 3

2. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ où E est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension n. On note π_u son polynôme minimal et χ_u son polynôme caractéristique

Corrigé

a) On a $\deg(\pi_u) \leqslant \deg(\chi_u)$ — ☑ Vrai ☐ Faux

b) Si $X^2 | \chi_u$ alors $\operatorname{rg}(u) \leqslant n-2$ — ☐ Vrai ☑ Faux

c) Si tous les espaces propres sont de dimension 1, $\chi_u = \pi_u$ — ☐ Vrai ☑ Faux

d) Si χ_u est scindé alors π_u aussi — ☑ Vrai ☐ Faux

e) Si $\chi_u = X^2 - X$ alors $\pi_u = \chi_u$ — ☑ Vrai ☐ Faux

3. Donner une matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ vérifiant

Corrigé

$\chi_A = \pi_A = (X+1)^2(X-1)$ $\qquad$ $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Corrigé

$\chi_A = X^2(X-1)$; $\pi_A = X(X-1)$ $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Justifier que $\pi_A = (X-1)^2$ et déterminer A^n en fonction des puissances de A.
   On pourra écrire la division euclidienne de X^n par π_A

Corrigé

On vérifie par le calcul que $(A - I_3)^2 = 0$. Donc $\pi_A | (X-1)^2$. Comme A n'est pas une matrice scalaire, son polynôme minimal n'est pas de degré 1 et $\pi_A = (X-1)^2$.
Soit $n \in \mathbf{N}$, la division euclidienne d'un polynôme P par $(X-1)^2$ s'écrit en utilisant la formule de Taylor :

$$P(X) = Q(X) \times (X-1)^2 + Q(1) + Q'(1)(X-1)$$

En particulier,

$$X^n = Q(X).\pi_A(X) + 1 + n(X-1)$$

Comme $\pi_A(A) = 0$ on obtient,

$$A^n = I_3 + n(A - I_3) = nA + (1-n)I_3$$