Les deux problèmes sont indépendants.
La calculatrice est interdite.

Problème I

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ ses valeurs propres 2 à 2 distinctes.
On pose $P = (X - \lambda_1) \ldots (X - \lambda_p)$.
On note $\mathbb{C}[A] = \{Q(A),\ Q \in \mathbb{C}[X]\}$ l'algèbre commutative des polynômes en A.

1) Montrer qu'il existe deux polynômes R et S de $\mathbb{C}[X]$ tels que $RP + SP' = 1$.

Dans la suite, on fixe deux polynômes R et S vérifiant cette relation

2) Soient $B, C \in \mathbb{C}[A]$.

   a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe $M_k \in \mathbb{C}[A]$ telle que
   $$(B + C)^k = B^k + kB^{k-1}C + M_k C^2$$
   b) En déduire qu'il existe $M \in \mathbb{C}[A]$ telle que $P(B + C) = P(B) + P'(B)C + MC^2$.

On définit par récurrence la suite de matrices $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ par
$$A_0 = A \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N} \ \ A_{k+1} = A_k - P(A_k)S(A_k)$$

3) Montrer que pour tout naturel k, il existe $H_k \in \mathbb{C}[A]$ telle que $P(A_k) = \big(P(A)\big)^{2^k} H_k$.
4) Montrer qu'il existe un entier naturel ℓ tel que $P(A_\ell) = 0$.

Dans la suite on fixe un entier ℓ vérifiant la relation ci-dessus et on pose $D = A_\ell$ et $N = A - A_\ell$.

5) Montrer que D et N appartiennent à $\mathbb{C}[A]$.
   Ainsi $DN = ND$.
6) Justifier que D est diagonalisable.
7) a) Montrer qu'il existe $H \in \mathbb{C}[A]$ telle que $N = P(A)H$.
   b) En déduire que N est nilpotente.
8) Soient $D', N' \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telles que
   $$A = D' + N',\ D' \text{ est diagonalisable, } N' \text{ est nilpotente et } D'N' = N'D'$$
   a) Montrer que D' et N' commutent avec A. En déduire que D' commute avec D et que N' commute avec N.
   b) Montrer que $N' - N$ est nilpotente.
   c) Soit d et d' les endomorphismes de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ canoniquement associés à D et D'.
   Montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ telle que les matrices de d et d' dans la base $\mathscr{B}$ soient diagonales. On pourra considérer les endomorphismes induits par d' sur les sous-espaces propres de d après avoir justifié que ces derniers sont stables par d'.
   d) En déduire que $D - D'$ est diagonalisable.
   e) Montrer que $D' = D$ et $N' = N$.

On a ainsi montré que A s'écrit de manière unique comme somme d'une matrice diagonalisable et d'une matrice nilpotente qui commutent entre elles, et que de plus ces deux matrices sont des polynômes en A et qu'on dispose d'un algorithme pour les calculer.

9) Exprimer P à l'aide du polynôme caractéristique χ_A de A et de χ'_A. Ainsi le calcul de P ne nécessite pas de déterminer les valeurs propres de A.

Problème II

Dans tout le sujet on fixe c un réel strictement positif.
Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ contenant 0.
On désigne par $\mathscr{C}^0(I)$ l'espace vectoriel réel des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$.
Si $f \in \mathscr{C}^0(I)$ est bornée sur I, on note $\|f\|_\infty = \sup_{x\in I} |f(x)|$.
On désigne par $\mathscr{C}^1(I)$ l'espace vectoriel réel des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ de I dans $\mathbb{R}$.
On note :

$$L^1(I) = \left\{ f \in \mathscr{C}^0(I)\ ,\ \int_I |f| \text{ converge} \right\} \text{ et } \forall f \in L^1(I), \|f\|_1 = \int_I |f|\,,$$

$$L^2(I) = \left\{ f \in \mathscr{C}^0(I)\ ,\ \int_I f^2 \text{ converge} \right\} \text{ et } \forall f \in L^2(I), \|f\|_2 = \sqrt{\int_I f^2}.$$

Pour toute fonction $f \in \mathscr{C}^0(I)$, on note $\varphi(f)$ la fonction définie sur I par :

$$\varphi(f) : x \mapsto \mathrm{e}^{-cx} \int_0^x \mathrm{e}^{ct} f(t)\, dt$$

Partie I

1) Soit $f \in \mathscr{C}^0(I)$.
   a) Justifier que $\varphi(f)$ appartient à $\mathscr{C}^1(I)$ et que $\varphi(f)(0) = 0$.
   b) Montrer que $\varphi(f)$ vérifie l'équation différentielle

$$y' + cy = f$$

2) Prouver que l'application $\varphi : f \mapsto \varphi(f)$ est un endomorphisme de $\mathscr{C}^0(I)$.

Partie II

On suppose, dans cette partie, que l'intervalle I est un segment $[0, b]$ avec $0 < b$.

3) a) Démontrer qu'il existe un réel positif $M_{1,2}$ tel que :

$$\forall f \in \mathscr{C}^0([0, b]), \|f\|_1 \leqslant M_{1,2} \|f\|_2$$

   On explicitera la plus petite valeur convenant pour $M_{1,2}$ et on justifiera sa minimalité.

   b) Démontrer qu'il existe un réel positif $M_{2,\infty}$ tel que :

$$\forall f \in \mathscr{C}^0([0, b]), \|f\|_2 \leqslant M_{2,\infty} \|f\|_\infty .$$

   On explicitera la plus petite valeur convenant pour $M_{2,\infty}$ et on justifiera sa minimalité.

4) Démontrer qu'il existe un réel positif k_∞ qu'on explicitera tel que :

$$\forall f \in \mathscr{C}^0([0, b])\ ,\ \|\varphi(f)\|_\infty \leqslant k_\infty \|f\|_\infty .$$

   On explicitera la plus petite valeur convenant pour k_∞ et on justifiera sa minimalité.

5) Démontrer qu'il existe un réel $k_{\infty,1}$ positif qu'on explicitera tel que :

$$\forall f \in \mathscr{C}^0([0, b])\ ,\ \|\varphi(f)\|_\infty \leqslant k_{\infty,1} \|f\|_1$$

   On ne demande pas ici de déterminer une constante optimale.

Partie III

Dans cette partie, I désigne l'intervalle $[0,+\infty[$ et, pour tout réel $\lambda > 0$, f_λ est la fonction définie sur I par :

$$\forall x \in [0,+\infty[,\ f_\lambda(x) = \mathrm{e}^{-\lambda x}.$$

6) Déterminer $\varphi(f_\lambda)$.

7) a) Démontrer que f_λ et $\varphi(f_\lambda)$ sont intégrables sur $[0,+\infty[$.

   b) Calculer $\|f_\lambda\|_1$ et $\|\varphi(f_\lambda)\|_1$.

8) Soit $f \in L^1([0,+\infty[)$.

   a) Montrer que $\forall x \in [0,+\infty[,\ |\varphi(f)(x)| \leqslant \varphi(|f|)(x)$.

   b) Soit $h = \varphi(|f|)$.

   Montrer que : $\forall X \in [0,+\infty[\quad , \quad \displaystyle\int_0^X h(x)\,dx \leqslant \frac{1}{c}\int_0^X |f(x)|\,dx.$

   On pourra utiliser la question 1.b

   c) En déduire que h est intégrable sur $[0,+\infty[$ et que : $\|h\|_1 \leqslant \dfrac{1}{c}\|f\|_1$.

   d) En déduire que $\varphi(f)$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ et que : $\|\varphi(f)\|_1 \leqslant \dfrac{1}{c}\|f\|_1$.

9) En utilisant les questions précédentes, justifier que φ induit un endomorphisme lipschitzien de $L^1([0,+\infty[)$ et déterminer sa meilleure constante de Lipschitz

$$|||\varphi|||_1 = \sup\left\{\frac{||\varphi(f)||_1}{||f||_1} \mid f \in L^1([0,+\infty[) \setminus \{0\}\right\}$$

10) a) i) Démontrer que f_λ et $\varphi(f_\lambda)$ appartiennent à $L^2([0,+\infty[)$.

   ii) Calculer $\|f_\lambda\|_2$ et $\|\varphi(f_\lambda)\|_2$.

   b) Soit $f \in L^2([0,+\infty[)$. On pose $g = \varphi(f)$.

   Démontrer que : $\forall X \in [0,+\infty[,\ \dfrac{g^2(X)}{2} + c\displaystyle\int_0^X g^2(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^X f(t)g(t)\ \mathrm{d}t.$

   On pourra utiliser la question 1.b

   c) En déduire que φ induit un endomorphisme lipschitzien de $L^2(I)$ et calculer :

$$|||\varphi|||_2 = \sup\left\{\frac{||\varphi(f)||_2}{||f||_2} \mid f \in L^2([0,+\infty[) \setminus \{0\}\right\}$$

Partie IV

Dans cette partie, I désigne toujours l'intervalle $[0,+\infty[$ et H est l'espace vectoriel des fonctions f de classe $\mathscr{C}^1$ de I vers $\mathbb{R}$ telles que f et f' soient de carrés intégrables sur I :

$$H = \left\{f \in \mathscr{C}^1(I),\ \int_0^{+\infty} f^2 \text{ et } \int_0^{+\infty} (f')^2 \text{ convergent}\right\}.$$

11) a) Démontrer que si f et g sont dans H, alors les fonctions fg et $f'g'$ sont intégrables sur I.

   b) Démontrer que l'application :

$$\phi : \left\{\begin{array}{ccl} H^2 & \to & \mathbb{R} \\ (f,g) & \mapsto & \phi(f,g) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)g(t)\ \mathrm{d}t + \int_0^{+\infty} f'(t)g'(t)\ \mathrm{d}t \end{array}\right.$$

   définit un produit scalaire sur H.

   Ainsi l'application $\|.\|_H$ définie par :

$$\forall f \in H,\ \|f\|_H = \sqrt{\int_0^{+\infty} f(t)^2\ \mathrm{d}t + \int_0^{+\infty} f'(t)^2\ \mathrm{d}t} = \sqrt{\|f\|_2^2 + \|f'\|_2^2}$$

   est une norme sur H, c'est la norme euclidienne associée au produit scalaire ϕ.

12) On pose : $K = \{f \in H,\ f(0) = 0\}$.
On rappelle qu'on a démontré à la question 10.c que φ induit un endomorphisme lipschitzien de $L^2(I)$.

a) Démontrer que, pour tout f dans $L^2(I)$, $\varphi(f) \in K$.

b) Démontrer que : $\exists A > 0,\ \forall f \in L^2(I),\ \|\varphi(f)\|_H \leqslant A\,\|f\|_2$.
On pourra exprimer A à l'aide de $|||\varphi|||_2$ même si cette quantité n'a pas été calculée à la question 10.c.

c) Démontrer que φ induit un isomorphisme de $L^2(I)$ sur K noté ψ.

d) Démontrer que ψ est lipschitzien de $(L^2(I), \|.\|_2)$ dans $(K, \|.\|_H)$.

e) Démontrer que ψ^{-1} est lipschitzien de $(K, \|.\|_H)$ dans $(L^2(I), \|.\|_2)$.