

1. Soit $x \in]-1, 1[$. On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} x^n = 1$, donc $1 - x^n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 1$.

Alors $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\frac{|a_n x^n|}{1 - x^n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} |a_n x^n|$, or le rayon de convergence de la série $\sum_{n \geq 1} a_n x^n$ est 1, donc la série

$\sum a_n x^n$ converge absolument et par comparaison, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{a_n x^n}{1 - x^n}$ converge absolument.

Si on prend $a_n = \frac{1}{(n+1)^2}$, la série $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(n+1)^2} \frac{2^n}{1-2^n}$ converge car $\frac{1}{(n+1)^2} \frac{2^n}{1-2^n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{-1}{n^2}$ et $\sum \frac{1}{n^2}$ converge.

2. Soit $b \in [0, 1[$ et $x \in [-b, b]$. Pour tout entier strictement positif n , $x^n \leq |x|^n \leq b^n$. On en déduit que $0 \leq 1 - b^n \leq 1 - x^n$ et donc

$$0 \leq \frac{1}{1 - x^n} \leq \frac{1}{1 - b^n}$$

Si on pose $f_n : x \mapsto a_n \frac{x^n}{1 - x^n}$ alors

$$\|f_n\|_{\infty, [-b, b]} \leq |a_n| \frac{b^n}{1 - b^n}$$

En utilisant la question ci-dessus, $\sum_{n \geq 1} \|f_n\|_{\infty, [-b, b]}$ converge (par comparaison pour les séries à termes positifs). Cela signifie que la suite de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge normalement donc uniformément sur $[-b, b]$.

3. On note encore $f_n : x \mapsto a_n \frac{x^n}{1 - x^n}$. On applique le théorème de continuité des séries de fonctions :

- Pour tout entier $n \geq 1$, la fonction f_n est continue sur $] - 1, 1[$
- la série $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge uniformément sur chaque segment $[-b, b] \subset] - 1, 1[$ d'après la question précédente.

On en déduit que la fonction f est continue sur $] - 1, 1[$.

Appliquons maintenant le théorème de caractère \mathcal{C}^1 des séries de fonctions.

- Pour tout entier $n \geq 1$, la fonction f_n est de classe \mathcal{C}^1 sur $] - 1, 1[$
- la série $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement vers f

— Pour tout entier $n \geq 1$, $f'_n : x \mapsto a_n \frac{nx^{n-1}}{(1-x^n)^2}$

Il reste à montrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f'_n$ converge uniformément sur tout segment $[-b, b]$ inclus dans $] - 1, 1[$.

Soit $b \in [0, 1[$, alors par le même raisonnement fait à la question 2)

$$\forall x \in [-b, b], |f'_n(x)| \leq \frac{|na_n|b^{n-1}}{(1-b^n)^2}$$

Cela implique que

$$\|f'_n\|_{\infty, [-b, b]} \leq \frac{|na_n|b^{n-1}}{(1-b^n)^2}$$

Comme à la question 1)

$$\frac{|na_n|b^{n-1}}{(1-b^n)^2} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} n|a_n|b^{n-1}$$

De plus, le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 1} a_n x^n$ est égal à celui de $\sum_{n \geq 1} n a_n x^{n-1}$, donc la série $\sum_{n \geq 1} n |a_n| b^{n-1}$ converge (car $b \in [0, 1[$). On en déduit que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{|n a_n| b^{n-1}}{(1-b)^2}$ converge (comparaison pour les séries à termes positifs) et finalement que la série $\sum_{n \geq 1} \|f'_n\|_{\infty, [-b, b]}$ converge.

La série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f'_n$ converge normalement donc uniformément sur tout $[-b, b] \subset]-1, 1[$

Cela montre que la fonction f est de classe \mathcal{C}^1 sur $] - 1, 1[$ et

$$\forall x \in] - 1, 1[, f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{n x^{n-1}}{(1-x)^2}$$

En particulier, $f'(0) = a_1$.

4. — Pour la première partie, d'après le théorème de sommation par paquets, il suffit de montrer que $(I_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ forment une partition de A .

Il est évident que chaque $I_n \subset A$, donc $\bigcup_{n \in \mathbf{N}^*} I_n \subset A$.

Soit $(k, p) \in A$, il est clair que $(k, p) \in I_{kp} \subset \bigcup_{n \in \mathbf{N}^*} I_n$, alors $\bigcup_{n \in \mathbf{N}^*} I_n = A$.

Si on suppose que $\exists (k, p) \in I_n \cap I_m$, alors $kp = n = m$, donc $I_n = I_m$, donc $(I_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ forment une partition de A .

La famille $(u_{n,p})_{(n,p) \in A}$ est sommable, par le théorème de sommation par paquets on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{p=1}^{+\infty} u_{n,p} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{(k,p) \in I_n} u_{k,p} \right)$$

- Soit $x \in] - 1, 1[$ et $n \in \mathbf{N}^*$, la série $\sum_{p \geq 1} a_n x^{np}$ converge absolument car la série $\sum_{p \geq 1} (x^n)^p$ est juste la série géométrique de raison x^n et que $|x^n| < 1$.

De plus

$$\sum_{p=1}^{+\infty} |a_n| |x|^{np} = |a_n| \frac{|x|^n}{1 - |x|^n}$$

Comme la série $\sum_{n \geq 1} |a_n| \frac{|x|^n}{1 - |x|^n}$ converge (par la question 1), la famille donnée est sommable. Sa somme vaut

$$\sum_{(n,p) \in A} a_n x^{np} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{p=1}^{+\infty} a_n x^{np} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{1 - x^n}$$

En appliquant ce qui précède à $u_{n,p} = a_n x^{np}$ on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{1 - x^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{p=1}^{+\infty} a_n x^{np} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{(k,p) \in I_n} a_k x^{kp} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{(k,p) \in I_n} a_k \right) x^n$$

Maintenant, si on fixe $n \in \mathbf{N}^*$, l'ensemble des couples (k, p) qui appartiennent à I_n sont les couples de la forme $(d, \frac{n}{d})$ où d est un diviseur (positif) de n . Cela implique que

$$\sum_{(k,p) \in I_n} a_k = \sum_{d|n} a_d = b_n$$

Finalement,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{1 - x^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^n$$

5. On pose pour tout entier n strictement positif $a_n = 1$. On commence par remarquer que l'on est bien dans le cadre étudié dans le problème car la série entière $\sum_{n \geq 1} x^n$ a un rayon de convergence égal à 1.

Dans ce cas, le b_n de la question 4) est

$$b_n = \sum_{d|n} 1 = d_n$$

En appliquant les résultats de la question 4) on a :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} d_n x^n$$

6. (a) Soit k, a et b des entiers naturels. On a

$$(k(a \wedge b)\mathbf{Z}) = k(a\mathbf{Z} + b\mathbf{Z}) = (ka)\mathbf{Z} + (kb)\mathbf{Z} \quad (ka \wedge kb)\mathbf{Z}$$

Par définition du PGCD, comme $k(a \wedge b)$ et $(ka) \wedge (kb)$ sont positifs, $k(a \wedge b) = (ka) \wedge (kb)$.

- (b) Par définition, $A_{\frac{n}{d}} \subset \llbracket 1, \frac{n}{d} \rrbracket$ donc si $x \in A_{\frac{n}{d}}$, $dx \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On peut donc considérer θ l'application définie de $A_{\frac{n}{d}}$ dans $\llbracket 1, n \rrbracket$ définie par $\theta : x \mapsto dx$. L'application est injective car, pour x, x' dans $A_{\frac{n}{d}}$, $dx = dx'$ implique $x = x'$. De plus, d'après la question précédente, si $x \in A_{\frac{n}{d}}$, $x \wedge \frac{n}{d} = 1$ et donc $dx \wedge n = d$. Cela montre que l'application θ est à valeurs dans $\{u \in \llbracket 1, n \rrbracket, u \wedge n = d\}$. Réciproquement pour $u \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $u \wedge n = d$, u est divisible par d par définition. On pose $x \in \llbracket 1, \frac{n}{d} \rrbracket$ tel que $u = dx$. Comme $dx \wedge d \frac{n}{d} = d$, on a $x \wedge \frac{n}{d} = 1$, c'est-à-dire, $x \in A_{\frac{n}{d}}$.

On a bien montré que $\theta : A_{\frac{n}{d}} \rightarrow \{u \in \llbracket 1, n \rrbracket, u \wedge n = d\}$ était une bijection.

- (c) Quand d décrit les diviseurs de n , les ensembles $\{u \in \llbracket 1, n \rrbracket, u \wedge n = d\}$ forment une partition de $\llbracket 1, n \rrbracket$. On en déduit

$$n = \#\llbracket 1, n \rrbracket = \sum_{d|n} \#\{u \in \llbracket 1, n \rrbracket, u \wedge n = d\} = \sum_{d|n} \#A_{\frac{n}{d}} = \sum_{d|n} \varphi\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} \varphi(d)$$

La dernière égalité est obtenue en voyant que l'application $d \mapsto \frac{n}{d}$ est une bijection de l'ensemble des diviseurs de n dans lui-même.

- (d) Notons R le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 1} \varphi(n)x^n$.

On sait que pour tout $n \geq 1$, $\varphi(n) \geq 1$ (car $1 \in A_n$). Or la série entière $\sum_{n \geq 1} x^n$ a un rayon de convergence égal à 1 donc $R \leq 1$.

On sait aussi que pour tout $n \geq 1$, $a_n \leq n$. Or la série entière $\sum_{n \geq 1} nx^n$ a un rayon de convergence égal à 1 (car elle a le même rayon de convergence que la série entière $\sum_{n \geq 1} x^n$) donc $R \geq 1$.

On obtient que $R = 1$.

Soit $x \in]-1, 1[$. On peut encore appliquer les résultats de la question 4). Cette fois, pour $n \geq 1$,

$$b_n = \sum_{d|n} \varphi(d) = n$$

On obtient donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \varphi(n) \frac{x^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^n$$

Or $\forall x \in]-1, 1[, \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$, en dérivant (on peut dériver terme à terme une série entière sur le disque ouvert de convergence) et en multipliant par x , on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$$

Finalement

$$\forall x \in]-1, 1[, \sum_{n=1}^{+\infty} \varphi(n) \frac{x^n}{1-x^n} = \frac{x}{(1-x)^2}$$

7. On rappelle que l'on a

$$\forall x \in [0, 1[, -\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n}$$

On veut faire tendre x vers 1 dans les deux membres de cette formule. Pour cela on va appliquer le théorème de la double limite à la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} g_n$ où $g_n : x \mapsto (-1)^n \frac{x^n}{n}$.

— pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} (-1)^n \frac{x^n}{n} = \frac{(-1)^n}{n}$

— montrons la convergence uniforme de $\sum_{n \geq 1} g_n$ au voisinage de 1.

Attention : il faut montrer la convergence uniforme au voisinage de 1 c'est-à-dire un intervalle de la forme $[a, 1[$. On ne peut pas invoquer un résultat général sur les séries entières qui donne la convergence uniforme sur un intervalle de la forme $[-b, b]$ avec $b \in [0, 1[$.

Attention : La série de fonctions ne converge pas normalement car $\|g_n\|_{\infty, [0, 1[} = \frac{1}{n}$.

Pour $x \in [0, 1[$ la série $\sum_{n \geq 1} g_n(x)$ relève du théorème des séries alternées car $(-1)^n \frac{x^n}{n}$ est du signe

de $(-1)^n$ et que $\frac{x^n}{n}$ décroît et tend vers 0. On peut donc utiliser la majoration du reste ;

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, |R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^k}{k} \right| \leq \frac{x^{n+1}}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$$

Donc $\|R_n\|_{\infty, [0, 1[} \leq \frac{1}{n+1}$. Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, donc la convergence de la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{x^n}{n}$ est uniforme,

Le théorème de la double limite s'applique et on a

$$-\ln 2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

8. Soit $x \in]-1, 0[\cup]0, 1[$,

$$\frac{f(x)}{x} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n-1}}{1-x^n}$$

On pose donc pour $n \geq 1$, $h_n : x \mapsto (-1)^n \frac{x^{n-1}}{1-x^n}$.

On veut appliquer le théorème de la double limite à la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} h_n$ pour déterminer sa limite en 0.

— On voit que

$$\lim_{x \rightarrow 0} (-1)^n \frac{x^{n-1}}{1-x^n} = \begin{cases} -1 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } n \neq 1 \end{cases}$$

— Soit $a \in]0, 1[$ (on peut prendre $a = \frac{1}{2}$ si on veut). Pour tout $n \geq 1$ et tout $x \in [-a, a]$,

$$0 < 1 - a^n \leq 1 - x^n$$

Il en découle que

$$|h_n(x)| \leq \frac{x^{n-1}}{1-a^n}$$

et donc $\|h_n\|_{\infty, [-a, a]} \leq \frac{a^{n-1}}{1-a^n}$.

Or la série $\sum_{n \geq 1} \frac{a^{n-1}}{1-a^n}$ converge car $\frac{a^{n-1}}{1-a^n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} a^{n-1}$ et la série $\sum a^{n-1}$ converge car $a \in]0, 1[$. La série $\sum_{n \geq 1} \|h_n\|_{\infty, [-a, a]}$ converge. Cela signifie que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} h_n$ converge normalement donc uniformément sur $[-a, a]$.

D'après le théorème de la double limite :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n-1}}{1-x^n} = -1$$

Un équivalent de $f(x)$ quand $x \rightarrow 0$ est donc $-x$.

On a $f(0) = 0$, donc $\frac{f(x)}{x} = \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$, alors $f'(0) = -1 = a_1$ c'est ce qu'on a trouvé à la question 3).

9. Toujours $a_n = (-1)^n$ et $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{1-x^n}$

Donc

$$(1-x)f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n x^n \frac{(1-x)}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{1+x+x^2+\dots+x^{n-1}}$$

Pour $n \geq 1$, on pose $g_n : x \mapsto (-1)^n \frac{x^n}{1+x+x^2+\dots+x^{n-1}}$.

On veut appliquer le théorème de la double limite pour calculer la limite quand x tend vers 1.

— $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} g_n(x) = \frac{(-1)^n}{n}$,

— Soit $x \in [0, 1[$, on veut montrer que la série $\sum_{n \geq 1} g_n(x)$ relève du théorème des séries alternées.

On voit que $g_n(x)$ est du signe de $(-1)^n$. Si on pose $u_n(x) = |g_n(x)| = \frac{x^n}{1+x+x^2+\dots+x^{n-1}}$, alors

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = x \frac{1+x+\dots+x^{n-1}}{1+x+\dots+x^{n-1}+x^n} < 1$$

ce qui montre que la suite $(|g_n(x)|)$ décroît.

De plus, pour $k \in \llbracket 0, (n-1) \rrbracket$, on a $x^{n-1} \leq x^k$ donc $nx^{n-1} \leq 1+x+x^2+\dots+x^{n-1}$,

Alors

$$|g_n(x)| \leq \frac{x^n}{nx^{n-1}} \leq \frac{x}{n} \leq \frac{1}{n}$$

Ce qui montre que la suite $(|g_n(x)|)$ tend vers 0.

Comme dans la question (Q10) on peut majorer le reste de la série

$$\forall n \in \mathbf{N}; |R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} g_k(x) \right| \leq |g_{n+1}(x)| \leq \frac{1}{n+1}$$

Cela signifie que $\|R_n\|_{\infty, [0,1[} \leq \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

Alors la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} g_n$ converge uniformément sur $]0, 1[$.

Le théorème de la double limite s'applique et on a ;

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x)f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow 1^-} g_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2$$

d'après la question 7)

Alors $(1-x)f(x) \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} -\ln 2$, qui s'écrit $f(x) \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} \frac{-\ln 2}{(1-x)}$.